Ein Beweis des allgemeinen Indexsatzes von Atiyah und Singer mit der Wärmeleitungsgleichung *

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.
im Fach Mathematik

Eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin
von
Diplom-Mathematiker Karsten Hippler,
geboren am 31. Mai 1977 in Berlin

Prof. Dr. Dr. h.c. C. Markschies
Präsident der Humboldt-Universität
zu Berlin

Prof. Dr. C. Carstensen
Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II

Gutachter:

1. Prof. Dr. J. Brüning
2. Prof. Dr. E. Kirchberg
3. Prof. Dr. M. Puschnigg

Tag der Verteidigung: 26. Oktober 2007

*Diese Arbeit wurde im Rahmen des Graduierten Kollegs GRK 870 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit wird ein Beweis des allgemeinen Indexsatzes von Atiyah und Singer gegeben, der die Methode von Getzler [G] zur Entwicklung des Wärmeleitungskerns eines Dirac-Operators mit der Poincaré-Dualität in der K-Theorie kombiniert. Die zugrunde liegende Beobachtung ist zunächst, dass sich der Index eines beliebigen Pseudodifferentialoperators (PDO) auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M nicht als kohomologische Formel über der Mannigfaltigkeit selbst angeben lässt, wenn M nicht orientierbar ist, sondern dass man in diesem Fall die Formel nur in der Kohomologie des Kotangentialbündels angeben kann. Mit Hilfe der KK-Theorie formulieren Kasparov in [K2] sowie Connes und Skandalis in [C-S] eine Poincaré-Dualität in der K-Theorie, mit deren Hilfe sich zeigen lässt, dass sich der Index eines beliebigen PDO mit dem Index eines Operators auf dem Kotangentialbündel identifizieren lässt. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich dieser Operator wie ein Dirac-Operator behandeln lässt, und dass man aus der Entwicklung seines Kerns mit der Methode von Getzler ([G],[B-G-V]) die allgemeine Indexformel erhalten kann. Ein interessantes Resultat der Betrachtungen ist, dass sich herausstellt, dass die konkrete Darstellung einer der Dualitätsabbildungen von Connes und Skandalis fehlerhaft ist (vgl. hierzu den Satz 4.7.6 und die daran anschließende Bemerkung).

Der grundlegende Gedanke der ausgeführten Beweismethode ist, dass man die allgemeine Indexformel, die durch einen Integralausdruck über dem Kotangentialbündel der Mannigfaltigkeit gegeben ist, als Riemann-Roch-Formel für den Dolbeault-Operator der fast komplexen Mannigfaltigkeit T^*M verstehen kann. Diese Formel lautet für den Dolbeault-Operator auf dem mit einem holomorphen Bündel $\mathcal{W}$ vertwisteten Dolbeault-Komplex über einer komplexen

Mannigfaltigkeit M

$$\mathrm{index}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) = \int_M \mathrm{Td}(T(M))\mathrm{ch}(\mathcal{W}).$$

Die formale Ähnlichkeit dieser Formel mit der Indexformel

$$\mathrm{index}(P) = (-1)^{dimM} \int_{T^*M} \mathrm{Td}(T(M) \otimes \mathbb{C})\mathrm{ch}(\sigma(P))$$

ist offenbar. Der Beweis beruht darauf, dass sich der Index eines Pseudodifferentialoperators vermöge der Poincaré-Dualität in der K-Theorie mit dem Index eines vertwisteten, regularisierten Dolbeault-Operators identifizieren lässt. Dessen Index lässt sich wiederum mit der Methode von Getzler mit einem Integral der obigen Form identifizieren. Die Rolle des Vertwistungsbündels spielt hierbei das Symbol des Operators.

Zu beachten ist das Vorzeichen in der Indexformel für einen allgemeinen elliptischen Operator. Aus der Perspektive der K-theoretischen Poincaré-Dualität rührt dieses Vorzeichen von einer der beiden Dualitätsabbildungen her. Connes und Skandalis übersehen dieses Vorzeichen in ihren Ausführungen.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert. Im zweiten Kapitel wird der Satz formuliert, und es wird eine zusammenhängende ausführliche Darstellung des Beweises gegeben, ohne jedoch Beweise der benutzten Sätze anzugeben. In den folgenden drei Kapiteln werden die verwendeten Methoden und Sätze ausführlich dargelegt und in ihren jeweiligen technischen Zusammenhang gestellt. Im Anhang finden sich außer dem Literaturverzeichnis auch eine Auflistung der verwendeten Symbole sowie eine kurze Aufstellung wesentlicher Definitionen und Sätze aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren.

Kapitel 2

Der Indexsatz von Atiyah und Singer

2.1 Formulierung des Satzes

In diesem Abschnitt soll der Indexsatz in der Form, in der Atiyah und Singer ihn in [A-S2] beweisen, formuliert werden. Außerdem sollen die wesentlichen Begriffe eingeführt sowie einige Konventionen festgelegt werden.

Bezeichne ker den Kern und ran das Bild eines linearen Operators. Ein Fredholm-Operator $F : X \to Y$ zwischen Banach-Räumen X und Y ist ein stetiger Operator mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathrm{ran}(F) = \overline{\mathrm{ran}(F)}$, d.h. das Bild ist abgeschlossen.

2. $\ker(F)$ und $\mathrm{coker}(F) = Y/\mathrm{ran}(F)$ sind endlichdimensional.

Der Raum $\mathrm{coker}(F)$ wird als Kokern des Operators bezeichnet. Die zweite Eigenschaft erlaubt es, den Index eines Fredholm-Operators zu definieren als die Größe

$$\mathrm{index}(F) = \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}(F)).$$

Der Begriff Mannigfaltigkeit bezeichnet in dieser Arbeit immer eine glatte Mannigfaltigkeit mit festgelegter glatter Struktur. Mit Hilfe dieser glatten Struktur lässt sich auf einer Mannigfaltigkeit der Begriff des Pseudodifferentialoperators (PDO) definieren (vgl. Definition P.0.9). Ein PDO vom Grad p auf einer Mannigfaltigkeit ist ein stetiger linearer Operator zwischen den

Sobolev-Räumen H^s und H^{s-p}. Ein PDO ist im Wesentlichen durch sein Symbol (Definition P.0.11) definiert. Innerhalb der Klasse der PDO existiert die Klasse der elliptischen PDO (vgl. Definition P.0.13). Es gilt dann der Satz P.0.16.

2.1.1 Satz *Ein elliptischer PDO auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist ein Fredholm-Operator.*

In [A] zeigt der Autor, dass das Symbol eines elliptischen Operators ein Element der Gruppe $K^0(T^*M)$ definiert. Der Indexsatz von Atiyah und Singer besagt, dass der Index eines elliptischen PDO alleine von der Topologie der Mannigfaltigkeit und der K-Theorieklasse des Symbols abhängt. In dieser Arbeit wird der folgende Satz bewiesen.

2.1.2 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator zwischen komplexen Vektorbündeln E und F. Es gilt die folgende Identität für den Index des Operators P;*

$$index(P) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{dimM} \int\limits_{T^*M} Td_{\mathbb{C}}(TM)ch(\sigma(P)).$$

[A-S2, Satz 2.12]

In dem zitierten Artikel von Atiyah und Singer taucht außer einem Vorzeichen kein Faktor vor dem Integral auf. Dies liegt an einer unterschiedlichen Definition der charakteristischen Klassen in [A-S2] und [B-G-V]. In dieser Arbeit wird die Definition von [B-G-V] übernommen, da sie den hier verwendeten Methoden besser entgegenkommt.

Es wird im Folgenden nur der Fall eines Pseudodifferentialoperators positiver Ordnung behandelt. Dies ist keine echte Einschränkung; mit dem Satz P.0.18 folgt der algemeine Fall.

2.2 Beweis des Satzes

Sei $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator positiver Ordnung auf der kompakten Mannigfaltigkeit M. Ein solcher Operator definiert ein Element der Gruppe $KK(C(M), \mathbb{C})$ auf die folgende Weise. Zunächst bildet man den graduierten Modul der L^2-Schnitte $L^2(E \oplus F)$ und definiert darauf den Operator $\mathcal{P} := \mathsf{P}(1 + \mathsf{P}^2)^{-1/2}$, wobei P definiert sei durch

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Das entsprechende Element werde mit $[P]$ bezeichnet. Es gilt der folgende Satz.

2.2.1 Satz *Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, so lässt sich jedes Element der Gruppe $KK(C(M), \mathbb{C})$ repräsentieren durch einen Modul, der wie oben aus einem elliptischen Pseudodifferentialoperator konstruiert wird.*

Die Gruppe $KK(C(M), \mathbb{C})$ definiert die K-Homologie der Mannigfaltigkeit M. Im Kontext dieser Arbeit werden allgemeine Eigenschaften einer Homologietheorie nicht verwendet, so dass der Begriff K-Homologie hier im Wesentlichen nur eine Bezeichnung ist. Die K-Theorie einer Mannigfaltigkeit definiert Atiyah in [A] auf die folgende Weise.

2.2.2 Definition *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $V(M)$ die Menge der Isomorphieklassen komplexer Vektorbündel über M. Die direkte Summe von Vektorbündeln definiert eine Addition auf dieser Menge, mit der $V(M)$ zu einer Halbgruppe wird. Das neutrale Element dieser Halbgruppe ist gegeben durch das 0-Vektorbündel. Die 0-te K-Theoriegruppe $K^0(M)$ ist definiert als die Grothendieck-Gruppe dieser Halbgruppe.*

Mit Hilfe des letzten Satzes kann man eine Paarung zwischen K-Theorie und K-Homologie definieren, indem man sich die Vertwistungskonstruktion von Operatoren und Vektorbündeln zu Nutze macht. Ein beliebiger PDO $Q : E \to F$ auf einer Mannigfaltigkeit M kann mit einem Vektorbündel V vertwistet werden. Der getwistete Operator ist gegeben durch $Q^V : C^\infty(M, E\hat{\otimes}V) \to C^\infty(M, E\hat{\otimes}V)$, wobei Q^V ein Operator mit Symbol $\sigma(Q)\hat{\otimes}\mathrm{id}_V$ sei. Im Falle eines ungraduierten Vektorbündels stimmt das Tensorprodukt $\hat{\otimes}$ mit dem gewöhnlichen Tensorprodukt überein. Ist Q elliptisch, so ist auch der getwistete Operator Q^V elliptisch. Da die Elliptizität durch eine solche Vertwistung nicht zerstört wird, kann man für kompaktes M die $\mathbb{Z}$-wertige „Indexpaarung“ von K-Theorie und K-Homologie definieren, indem man für $[Q]$ und $[V]$

$$< [V], [Q] >:= \mathrm{index}(Q^V)$$

setzt, wobei wie oben Q ein elliptischer Operator und V ein Vektorbündel sei. Bezeichnet $\mathbf{1}_M$ das triviale komplexe Linienbündel über M, so gilt mit dieser

Definition

$$\mathrm{index}(P) = < \mathbf{1}_M, [P] >$$

für einen elliptischen Operator P. Mit den Methoden der Kasparov-Theorie lässt sich diese Formel nun in einer Weise umformen, dass man ein Objekt erhält, welches sich mit der Wärmeleitungsgleichung behandeln lässt. Dazu wird die K-Theoriepaarung über einer nichtkompakten Mannigfaltigkeit benötigt, was die Einführung des Kasparov-Produktes erfordert.

2.2.3 Satz *Ist A eine separable C^*-Algebra, so definiert das Kasparov-Produkt eine bilineare Abbildung*

$$KK(\mathbb{C}, A) \times KK(A, \mathbb{C}) \to \mathbb{Z} \; ; \; (a, b) \mapsto a \otimes_A b.$$

Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $A = C(M)$, so ist das Kasparov-Produkt durch die Indexpaarung gegeben.

Dieser Satz liefert das Werkzeug zur Definition der allgemeinen Homologiepaarung.

2.2.4 Definition *Die Homologiepaarung der Gruppen $KK(\mathbb{C}, A)$ und $KK(A, \mathbb{C})$ ist definiert durch das Kasparov-Produkt*

$$< a, b > := a \otimes_A b.$$

Es existieren nun zwei kanonische Abbildungen, die eine gewisse Dualität zwischen den K-Theoriegruppen der Algebren $C(M)$ und $C_0(T^*M)$ implementieren. Diese sind durch die folgenden Konstruktionen gegeben.

Das Symbol eines elliptischen PDO definiert ein Element in der K-Theorie des Kotangentialbündels T^*M der Mannigfaltigkeit M. Bei der Konstruktion des zu diesem Operator gehörenden K-Homologieelementes wurde aus dem elliptischen Operator zwischen zwei Vektorbündeln ein elliptischer Operator $\mathcal{P}$ 0-ter Ordnung auf der direkten Summe dieser Vektorbündel mit der entsprechenden natürlichen Graduierung gebildet. Dessen Symbol definiert ein Element der Gruppe $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$. Hierzu wird das Symbol, das ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen den nach T^*M zurückgeholten Bündeln ist, als ein $C_0(T^*M)$-linearer „Operator“ zwischen den Moduln der Schnitte der zurückgeholten Bündel aufgefasst. Der entsprechende Kasparov-Modul ist gegeben durch $(\Gamma(\pi^*(E \oplus F)), \sigma(\mathcal{P}))$ und wird mit $[\sigma(P)]$ bezeichnet. Mit Hilfe des Satzes 2.2.1 erhält man den folgenden Satz.

2.2.5 Satz *Die Abbildung*

$$\hat{\sigma} : KK(C(M), \mathbb{C}) \to KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M)),$$

die definiert ist durch die Zuordnung

$$\hat{\sigma} : [P] \mapsto (-1)^{dimM}[\sigma(P)]$$

ist ein Isomorphismus.

Die fast komplexe Struktur der Mannigfaltigkeit T^*M erlaubt die Konstruktion eines zweiten kanonischen Isomorphismus

$$\overline{\partial} : KK(\mathbb{C}, C(M)) \simeq KK(C_0(T^*M), \mathbb{C}).$$

Eine Mannigfaltigkeit M heißt fast komplex, falls ein Endomorphismus J ihres Tangentialbündels existiert, so dass $J^2 = -\mathrm{id}$; die Abbildung J heißt fast komplexe Struktur auf der Mannigfaltigkeit. Komplexifiziert man das Tangentialbündel und bezeichnet die Komplexifizierung von J mit $J_{\mathbb{C}}$, so lässt sich zeigen, dass $J_{\mathbb{C}}$ nur die Eigenwerte $+i$ und $-i$ hat. Das Eigenraumbündel zum Eigenwert $-i$ werde mit $T^{0,1}(M)$ bezeichnet. Auf einer fast komplexen Mannigfaltigkeit lässt sich das Bündel $\mathcal{S}(M) := \Lambda^* T^{0,1}(M)$ und der entsprechende Dolbeault-Operator $\overline{\partial}_M$ konstruieren. Der Operator $\overline{\partial}_M + \overline{\partial}_M^*$ ist dann ein Dirac-Operator und als solcher elliptisch. Er definiert daher ein Element der K-Homologie der Mannigfaltigkeit, das mit $[\overline{\partial}_M]$ bezeichnet werde.

Es ist eine bekannte Tatsache, dass das Kotangentialbündel einer beliebigen Mannigfaltigkeit, selbst aufgefasst als Mannigfaltigkeit, eine fast komplexe Struktur besitzt. Es existiert daher immer das kanonische Homologieelement $[\overline{\partial}_{T^*M}]$.

Oben wurde gezeigt, wie ein elliptischer PDO $Q : E \to F$ auf einer Mannigfaltigkeit mit einem Vektorbündel V zu einem elliptischen Operator Q^V vertwistet werden kann. Die Abbildung $\overline{\partial} : KK(C_0(T^*M), \mathbb{C}) \simeq KK(\mathbb{C}, C(M))$ ist nun gegeben, indem man ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M mit Hilfe der Bündelprojektion $\pi : T^*M \to M$ nach T^*M zurückholt und mit dem Operator $\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}_{T^*M}^*$ twistet. Genauer gilt dann der folgende Satz.

2.2.6 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $[E] - [F] \in K^0(M)$ ein durch die Differenz der Vektorbündel E und F definiertes Element der K-Theorie von M. Es sei $\pi : T^*M \to M$ die Bündelprojektion. Sei $D := \overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}_{T^*M}^*$. Die Zuordnung*

$$\overline{\partial} : [E] - [F] \mapsto [D^{\pi^* E}] - [D^{\pi^* F}]$$

von $K^0(M)$ nach $KK(C_0(T^*M),\mathbb{C})$ ist wohldefiniert und liefert einen Isomorphismus dieser Gruppen.

Die folgende Aussage über die Verträglichkeit der Abbildungen $\overline{\partial}$ und $\hat{\sigma}$ rechtfertigt die Bezeichnung dieser Abbildungen als Dualitätsabbildungen.

2.2.7 Satz *Sei $a \in KK(C(M),\mathbb{C})$ und $b \in KK(\mathbb{C},C(M))$. Mit den oben definierten Abbildungen $\hat{\sigma}$ und $\overline{\partial}$ gilt*

$$< b, a >=< \hat{\sigma}(a), \overline{\partial}(b), > .$$

Man erhält also für den Index eines elliptischen Pseudodifferentialoperators die Identität

$$\mathrm{index}(P) =< \mathbf{1}_M, [P] >=< \hat{\sigma}([P]), \overline{\partial}(\mathbf{1}_M)) >= (-1)^{\dim M} < [\sigma(P)], [\overline{\partial}_{T^*M}] > .$$

Die Paarung auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nun die Paarung eines Dirac-Operators mit einem Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit T^*M. Die Berechnung dieser Paarung über einer kompakten Mannigfaltigkeit gerader Dimension ließe sich mit lokalen Methoden bewerkstelligen; der Wärmeleitungskern des vertwisteten Dirac-Operators lässt sich asymptotisch entwickeln, um die Indexformel zu erhalten.

Im Falle der obigen Paarung muss man nun der Nichtkompaktheit von T^*M Rechnung tragen. Dazu ist zunächst zu erklären, wie das Kasparov-Produkt, das die K-Theoriepaarung im allgemeinen Fall definiert, hier konkretisiert werden kann. Die einfache Vertwistungskonstruktion, die zur Definition der Paarung über kompakten Mannigfaltigkeiten herangezogen wurde, liefert hier nicht das Gewünschte, da die Ellitpizität des PDO in diesem Fall nicht die Fredholm-Eigenschaft dieses Operators liefert. So ist z.B. Operator $\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M}$ kein Fredholm-Operator. Es ist jedoch jeder Kasparov-Modul $(\mathcal{H},\mathcal{F}) \in KK(\mathbb{C},\mathbb{C})$ durch einen Fredholm-Operator auf einem Hilbert-Raum gegeben, wie sich leicht anhand der Definition nachprüfen lässt.

Es stellt sich heraus, dass das im Kontext dieser Arbeit interessierende Produkt $< \sigma([P]), [\overline{\partial}_{T^*M}] >_K$ im Wesentlichen durch eine Regularisierung eines getwisteten Operators der Form $(\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})^{\sigma(P)}$ gegeben ist. Obwohl sich das resultierende Produkt nicht durch einen Dirac-Operator repräsentieren lässt, kann man den Spielraum, den die Wahl eines Repräsentanten des K-Theorieelementes lässt, nutzen, um ein Objekt zu erhalten, das sich mit der Methode von Getzler ([G],[B-G-V]) behandeln lässt.

Für die Wahl des Repräsentanten der Symbolklasse macht man zunächst die folgende Beobachtung. Das Symbol eines Pseudodifferentialoperators ist gegeben durch zwei Vektorbündel über dem Kotangentialbündel und einen Vektorbündelhomomorphismus zwischen diesen Bündeln. Der folgende Satz zeigt, dass für ein beliebiges Element der K-Theorie des Kotangentialbündels dieser Vektorbündelhomomorphismus in einem gewissen Sinne trivial gewählt werden kann, so dass sich alle Information über das entsprechende Element in den Vektorbündeln wiederfindet.

2.2.8 Satz *Jedes Element der Gruppe $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ lässt sich repräsentieren durch einen Kasparov-Modul*

$$(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T)$$

der folgenden Form:

1. *Die Vektorbündel E und F sind in $T^*M \times \mathbb{C}^n$ eingebette Bündel. Es existiert eine beschränkte Umgebung U von $M \subset T^*M$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$, so dass $E\mid_{T^*M\setminus U} = F\mid_{T^*M\setminus U} = (T^*M \setminus U) \times V$. $\Gamma(E)$ ist der positive Teil der Graduierung.*

2. *Der Operator T ist gegeben durch den Multiplikationsoperator*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \cdot id_V \\ \varphi \cdot id_V & 0 \end{pmatrix},$$

wobei φ eine stetige reellwertige Funktion sei, die auf U verschwindet und außerhalb einer beschränkten Umgebung U_0 von $\overline{U}$ konstant gleich 1 ist.

Das Produkt zweier Kasparov-Moduln $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)$ besteht nun in der Bildung des Tensorproduktes der graduierten C^*-Moduln $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ sowie eines gewissen Produktes der involvierten Operatoren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$. Das Kasparov-Produkt der Elemente $\sigma(P)$ und $[\overline{\partial}_{T^*M}]$ hat dann die Form

$$[\sigma(P)] \otimes [\overline{\partial}_{T^*M}] = ((\Gamma(E) \oplus \Gamma(F))\hat{\otimes}_{C_0(T^*M)} L^2(\mathcal{S}(T^*M)), \mathcal{D}).$$

Das graduierte Tensorprodukt ist der Banach-Raumabschluss des algebraischen Tensorproduktes des rechts-Moduls $\Gamma(E) \oplus \Gamma(F)$ über der Algebra $C_0(T^*M)$ mit dem Hilbert-Raum $L^2(\mathcal{S}(T^*M))$, auf dem die Algebra $C_0(T^*M)$ als Algebra von Multiplikationsoperatoren wirkt. Dieses Produkt ist kanonisch isomorph zum Hilbert-Raum der L^2-Schnitte des Vektorbündels $(E \oplus F) \hat{\otimes} \mathcal{S}(T^*M)$.

Der folgende Satz zeigt, dass die Konstruktion des Operators $\mathcal{D}$ auch im nichtkompakten Fall im Wesentlichen durch die Vertwistungsoperation gegeben ist.

2.2.9 Satz *Der Kasparov-Modul* $(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T)$ *repräsentiere die Symbolklasse* $[\sigma(P)]$. *Es sei* $D := (\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})(1 + \Delta)^{-1/2}$. *Es existiert ein reellwertiger Operatorkern* $\mathcal{M}$, *so dass mit* $\mathcal{N} = 1 - \mathcal{M}$ *das Kasparov-Produkt*

$$[\sigma(P)] \otimes [\overline{\partial}_{T^*M}]$$

gegeben ist durch den Modul

$$(L^2(T^*M, (E \oplus F)\hat{\otimes}\mathcal{S}(T^*M)), \mathcal{D}),$$

wobei $\mathcal{D}$ *gegeben ist durch*

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}^{1/2} T \hat{\otimes} id_{\mathcal{S}(T^*M)} + \mathcal{N}^{1/2} D^{E \oplus F}.$$

Wählt man einen Modul entsprechend dem Satz 2.2.8 als Repräsentanten des Symbols, so haben die Vektorbündel E und F in einem bestimmten Sinne einen kompakten Träger. Es lässt sich nun zeigen, dass man den Operator $\mathcal{M}$ so wählen kann, dass $\mathcal{D}$ auf dem Träger des Bündels $E \oplus F$ mit dem getwisteten Dolbeault-Operator übereinstimmt. Dazu muss man $\mathcal{M}$ dort nur identisch 0 setzen. Dies ist wesentlich bei der Berechnung des Index, da der Operator aus dem Kasparov-Produkt nach Multiplikation mit dem unbeschränkten Operator $(1 + \Delta)^{1/2}$ auf dem Träger der Vektorbündel mit dem getwisteten Dolbeault-Operator übereinstimmt. Zunächst ist wichtig, dass die entsprechende Operatorhalbgruppe durch glatte Kerne gegeben ist. Es gilt dazu der folgende Satz.

2.2.10 Satz *Der Operator* $\mathcal{D}(1+\Delta)^{1/2}$ *erzeugt eine Wärmeleitungshalbgruppe von Operatoren, die durch glatte Operatorkerne gegeben sind.*

Für Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten folgt aus dieser Aussage sofort, dass die Operatoren der Halbgruppe Spurklasseoperatoren sind. Mit Hilfe der McKean-Singer Formel erhält man den Zusammenhang zwischen dem Index eines Operators und der entsprechenden Wärmeleitungsgleichung.

Diese Formel lautet abstrakt

$$\mathrm{index}(P) = \mathrm{str}(T(t))$$

wobei str die graduierte Spur auf den Endomorphismen des Hilbert-Raums der L^2-Schnitte bezeichne und T die Wärmeleitungshalbgruppe des Operators

$$\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei wird wieder angenommen, dass P positive Ordnung hat. Diese Formel ist offensichtlich nur dann sinnvoll, wenn die Operatoren $T(t)$ Spurklasseoperatoren sind. Mit dem Kern $k_t(\cdot,\cdot)$ der Halbgruppe $T(t)$ lässt sie sich schreiben als

$$\operatorname{index}(P) = \int_M \operatorname{str} k_t(x,x)dx,$$

wobei hier str die graduierte Spur auf den Endomorphismen des Vektorbündels ist. Für die Existenz des Integrals ist es nun nicht mehr zwingend erforderlich, dass die Halbgruppe $T(t)$ aus Spurklasseoperatoren besteht, sondern nur, dass der Integrand eine integrierbare Funktion ist. Betrachtet man nun den Operator $D^{E\oplus F}$, so ist dessen Wärmeleitungshalbgruppe $T(\cdot)$ nicht durch Spurklasseoperatoren gegeben, so dass der Ausdruck $\operatorname{str}(T(t))$ nicht sinnvoll ist. Es lässt sich jedoch zeigen, dass bei bestimmter Wahl der Repräsentanten das Integral

$$\int_{T^*M} \operatorname{str} k_t(x,x)dx \qquad (*)$$

existiert, wobei $k_t(\cdot,\cdot)$ den Kern der Operatorhalbgruppe $T(t)$ bezeichne.

Dazu bemerkt man zunächst, dass der Wärmeleitungskern $k_t(\cdot,\cdot)$ des Operators Werte in $\operatorname{End}(\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E\oplus F)) \simeq \mathcal{C}^c(T^*M)\hat{\otimes}\operatorname{End}(E\oplus F)$ annimmt. Nun gilt der folgende Satz.

2.2.11 Satz *Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension. Die Symbolabbildung $\sigma : \mathcal{C}^c(V) \to \Lambda^*V \otimes \mathbb{C}$, die definiert ist durch*

$$\sigma(a) := c(a)1 \in \Lambda^*V,$$

ist ein Isomorphismus von $\Lambda^*V \otimes \mathbb{C}$ und $\mathcal{C}^c(V)$, aufgefasst als Clifford-Moduln.

Es lässt sich $\omega_t : x \mapsto k_t(x,x)$ also als Differentialform mit Werten in dem Bündel $\operatorname{End}(E\oplus F)$ auffassen. Der Graduierung der Clifford-Algebra entspricht unter diesem Isomorphismus die Graduierung der äußeren Algebra durch die

Formen von gerader bzw. ungerader Dimension. Unter der Graduierung des Vektorbündels $E \oplus F$, die durch die direkte Summe gegeben ist, zerfällt eine Differentialform in eine positive und eine negative Komponente; $\omega = \omega^+ + \omega^-$. Der nächste Satz zeigt, dass dann das obige Integral über die graduierte Spur mit dem graduierten Integral über den Volumenanteil der entsprechenden Form identisch ist.

2.2.12 Satz *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $a \in \Gamma(\mathcal{C}^c(T^*M)\hat{\otimes} End(E \oplus F))$ ein Schnitt im Endomorphismenbündel des Bündels $\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F)$ und $\omega = \sigma(a)$ die entsprechende Form. Dann gilt*

$$\int\limits_M str(a) = \int\limits_M (tr_E \omega^+ - tr_F \omega^-).$$

Die Existenz des einen Integrals impliziert die Existenz des anderen. Das rechte Integral ist als das Integral über den Volumenanteil der Form zu verstehen.

Nun ist ein Dirac-Operator auf einer Mannigfaltigkeit M durch eine Wirkung der Clifford-Algebra auf einem Clifford-Modul $\mathcal{E}$ und deren Verknüpfung mit einem Clifford-Zusammenhang auf diesem Modul gegeben. Berline, Getzler und Vergne zeigen dann mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung des Kerns $k_t(\cdot,\cdot)$ den folgenden Satz.

2.2.13 Satz *Sei M eine nicht notwendigerweise kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ mit Krümmungstensor Ω_M. Für die Differentialform ω_t, die man einem Dirac-Operator auf $\mathcal{E}$ zuordnet, gilt*

$$\omega_t = (4\pi t)^{-n} det^{1/2}\left(\frac{t\Omega_M/2}{\sinh(t\Omega_M/2)}\right) exp\left(-t\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}\right).$$

Insbesondere ist der Volumenanteil der Form ω_t von t unabhängig. Bezeichnen $\mathcal{P}^{\hat{A}}$ und $\mathcal{P}^{ch}$ die Potenzreihen, die die entsprechenden charakteristischen Klassen definieren, lässt sich dies in der Form

$$\omega_t = (2\pi i t)^{-n}\mathcal{P}^{\hat{A}}(t\Omega_M)\mathcal{P}^{ch}(t\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}})$$

schreiben.

Tatsächlich wird in [B-G-V] diese Aussage nur für kompakte M bewiesen. Die Berechnung lässt sich jedoch mit einigen Modifikationen auf den nichtkompakten Fall übertragen, da sie im wesentlichen lokaler Natur ist. Für die Existenz des Integrals $(*)$ wäre dann hinreichend, dass der Volumenanteil der Form ω_t kompakten Träger hat. Dies ist bei entsprechender Wahl der Zusammenhänge auf E und F laut dem folgenden Satz gewährleistet. Die Bündel E und F seien hierbei immer noch die speziellen Bündel aus Satz 2.2.8.

2.2.14 Satz *Sei p_E die Projektion in $M_n(C_0(T^*M))$ mit $p_E \cdot C_0(T^*M)^n = \Gamma(E)$ sowie $d : \mathcal{A}^0(T^*M) \to \mathcal{A}^1(T^*M)$ das äußere Differential. Dann definiert die Abbildung*

$$\nabla^E := p_E \circ d : \Gamma(E) \to \mathcal{A}^1(T^*M, E)$$

einen Zusammenhang auf E. Analog sei ∇^F definiert. Weiter sei ∇ ein Clifford-Zusammenhang auf dem Clifford-Modul $\mathcal{S}(T^*M)$. Dann ist

$$\nabla \otimes id + id \otimes (\nabla^E \oplus \nabla^F) : \Gamma(\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F)) \to \mathcal{A}^1(T^*M, \mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F))$$

ein Clifford-Zusammenhang auf dem getwisteten Clifford-Modul $\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F)$. Bildet man mit diesem Zusammenhang und der getwisteten Clifford-Algebrenwirkung den Dirac-Operator $(\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})^{E \oplus F}$ mit Wärmeleitungskern k_t bzw. der diesem Kern entsprechenden Form ω_t, so hat der Volumenanteil dieser Form kompakten Träger.

Die folgende Identität charakteristischer Klassen und die Darstellung des Wärmeleitungskerns aus dem Satz 2.2.13 zeigen die Gültigkeit des letzten Satzes.

2.2.15 Satz *Bezeichne π die Bündelprojektion $\pi : T^*M \to M$. Des Weiteren seien $\mathcal{P}^{\hat{A}}$, $\mathcal{P}^{Td_{\mathbb{C}}}$ und $\mathcal{P}^{ch}$ die Potenzreihen, die die entsprechenden charakteristischen Klassen definieren. Ω_M und Ω_{T^*M} bezeichne die riemannschen Krümmungen von M und T^*M, wobei die Metrik auf T^*M von der Metrik auf M induziert sei und $\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}$ die relative Krümmung des Clifford-Moduls $\mathcal{E} := \mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F)$ sowie $\Omega^{E \oplus F}$ die Krümmung des Bündels $E \oplus F$. Dann gilt die folgende Identität von Formen auf T^*M;*

$$\mathcal{P}^{\hat{A}}(\Omega_{T^*M})\mathcal{P}^{ch}(\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}) = \mathcal{P}^{Td_{\mathbb{C}}}(\pi^*(\Omega_M))\mathcal{P}^{ch}(\Omega^{E \oplus F}).$$

Insbesondere folgt aus diesem Satz die Gleichheit der Kohomologieklassen

$$\hat{A}(T^*M)\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S}) = \pi^*\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(M)\mathrm{ch}(E \oplus F).$$

Der Chern-Charakter des graduierten Bündels ist in diesem Zusammenhang als der mit der graduierten Spur definierte Chern-Charakter aus [Q] zu verstehen.

Da die Krümmungsform $\Omega^{E\oplus F}$ aufgrund der speziellen Form des Zusammenhangs $\nabla^{E\oplus F}$ kompakten Träger hat, und die Form $\mathcal{P}^{\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}}(\pi^*(\Omega_M))$ auf T^*M keinen Volumenanteil besitzt, besagt der Satz außerdem, dass der Volumenanteil von $\mathcal{P}^{\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}}(\pi^*(\Omega_M))\mathcal{P}^{\mathrm{ch}}(\Omega^{E\oplus F})$ kompakten Träger hat, was die Aussage des letzten Satzes war, denn

$$\omega_t = \mathcal{P}^{\hat{\mathcal{A}}}(\Omega_{T^*M})\mathcal{P}^{\mathrm{ch}}(\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}) = \mathcal{P}^{\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}}(\pi^*(\Omega_M))\mathcal{P}^{\mathrm{ch}}(\Omega^{E\oplus F}).$$

Zusammenfassend erhält man mit den Sätzen der letzten Abschnitte folgendes. Die Einschränkung des Wärmeleitungskerns des Dirac-Operators $(\overline{\partial}_{T^*M}+\overline{\partial}^*_{T^*M})^{E\oplus F}$ auf die Diagonale lässt sich interpretieren als Differentialform auf T^*M, deren Volumenanteil kompakten Träger besitzt. Das Integral über die Spur des Wärmeleitungskerns von $(\overline{\partial}_{T^*M}+\overline{\partial}^*_{T^*M})^{E\oplus F}$ existiert und ist gegeben durch

$$\int\limits_{T^*M} \mathrm{str} k_t(x,x)dx = \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(M)\mathrm{ch}(E\oplus F).$$

Um dieses Integral mit dem Index des interessierenden Operators zu identifizieren, sei zunächst die folgende abstrakte Überlegung gemacht. Ist H ein bezüglich der Wirkung der Operatoren D und T invarianter Unterraum. Die Operatoren seien jeweils Generator einer Operatorhalbgruppe. Dann stimmen die beiden von diesen Operatoren generierten Halbgruppen auf H überein. In diesem Sinne ist die Bildung der Halbgruppe also lokal. Nun kann man den Operatorkern $\mathcal{M}$ so wählen, dass er auf dem Träger von $E\oplus F$ identisch 0 ist, da dies nur eine kompakte Modifikation der ursprünglichen Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ bedeutet. Es ist dann der Wärmeleitungskern des Operators

$$\mathcal{D}(1+\Delta)^{1/2},$$

mit

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}^{1/2}T\hat{\otimes}\mathrm{id}_{\mathcal{S}(T^*M)} + \mathcal{N}^{1/2}D^{E\oplus F}$$

dessen Index hier interessiert, auf dem Unterraum der Schnitte, deren Träger im Träger des Bündels $E\oplus F$ liegt, identisch mit dem oben berechneten Kern des Dirac-Operators. Der Satz 2.2.10 besagt, dass der Wärmeleitungskern $k_t^{\mathcal{D}}$ des Operators $\mathcal{D}(1+\Delta)^{1/2}$ ebenfalls durch glatte Schnitte des Bündels $\mathrm{End}(\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E\oplus F)) \simeq \mathcal{C}^c(T^*M)\hat{\otimes}\mathrm{End}(E\oplus F)$ gegeben ist, und somit vermöge der Zuordnung $\omega_t^{\mathcal{D}} : x \mapsto k_t^{\mathcal{D}}(x,x)$ eine Differentialform definiert. Da $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ außerdem den Volumenanteil des Operatorkerns invariant lassen, erhält man schließlich die Identität

$$\int\limits_{T^*M} \mathrm{str} k_t(x,x)dx = \int\limits_{T^*M} \mathrm{str} k_t^{\mathcal{D}}(x,x)dx.$$

Diese Aussagen seien in dem folgenden Satz zusammengefasst.

2.2.16 Satz *Der Operatorkern $\mathcal{M}$ aus Satz 2.2.9 kann so gewählt werden, dass er auf einem beliebigen Kompaktum K identisch 0 ist. Sei $\mathcal{D}$ der mit diesen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ definierte Opertor. Dann erzeugt $\mathcal{D}(1+\Delta)$ eine Operatorhalbgruppe mit glattem Kern. Die Einschränkung dieses Kerns auf die Diagonale stimmt auf dem Träger des Bündels $E \oplus F$ mit der Einschränkung des Kerns des getwisteten Dolbeault-Operators $(\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})^{E\oplus F}$ überein.*

Dieser Satz erlaubt es, das Integral über den Operatorkern mit dem Indexintegral über die charakteristischen Klassen zu identifizieren;

$$\int\limits_{T^*M} \mathrm{str} k_t^{\mathcal{D}}(x,x)dx = \int\limits_{T^*M} \pi^* \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(M)\mathrm{ch}(E \oplus F).$$

Im Wesentlichen fehlt an dieser Stelle nur noch eine Verallgemeinerung der McKean-Singer Formel, um den Indexsatz zu erhalten. Diese Verallgemeinerung ist mit dem folgenden Satz gegeben. Für die Formulierung des Satzes soll noch eine Bezeichnung eingeführt werden. Da $\mathcal{D}$ ein ungerader Operator ist, gilt

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_- \\ \mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix}$$

für gewisse Operatoren $\mathcal{D}_+$ und $\mathcal{D}-$. Es gilt dann der folgende Satz.

2.2.17 Satz *Sei $\mathcal{D}$ der oben konstruierte Operator und $k_t^{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$ der damit konstruierte Wärmeleitungskern . Für den Index des Operators $\mathcal{D}_+$ gilt die McKean-Singer Formel;*

$$\mathit{index}(\mathcal{D}^+) = \int\limits_{T^*M} \mathit{strk}_t^{\mathcal{D}}(x,x)dx.$$

Fügt man dieses Resultat mit der Identität

$$\mathrm{index}(P) =< \mathbf{1}_M, [P] >=< \hat{\sigma}([P]), \overline{\partial}(\mathbf{1}_M)) >= (-1)^{\dim M} < \sigma(P), [\overline{\partial}_{T^*M}] >$$

zusammen, so erhält man den Indexsatz. Es ist

$$\mathrm{index}(\mathcal{D}^+) = (-1)^{\dim M} < \sigma(P), [\overline{\partial}_{T^*M}] >_K,$$

und somit gilt

$$\mathrm{index}(P) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(M)\mathrm{ch}(E \oplus F).$$

Da das graduierte Bündel $E \oplus F$ die Symbolklasse repräsentiert, lässt sich dies schreiben als

$$\mathrm{index}(P) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(M)\mathrm{ch}(\sigma(P)).$$

Kapitel 3

Dirac-Operatoren und Clifford-Moduln

3.1 Clifford-Algebren und Clifford-Moduln

Bezeichne $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3.1.1 Satz *Sei (V, g) ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einer bilinearen Form g. Dann existiert eine assoziative Algebra $C(V, g)$ mit einer linearen Abbildung $j : V \to C(V, g)$ mit $j(v)^2 = -g(v, v) \cdot 1$ und der folgenden Eigenschaft: ist $u : V \to A$ eine lineare Abbildung in eine assoziative unitale Algebra mit der Eigenschaft $u(v)^2 = -g(v, v) \cdot 1$, so existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $\tilde{u} : C(V, g) \to A$, so dass $\tilde{u} \circ j = u$. [L-M, Proposition 1.1]*

Die Algebra $C(V, g)$ heißt die Clifford-Algebra der Form g. Ist (V, g) euklidischer Vektorraum, so sei $\mathcal{C}_V := C(V, g)$. Ist $(V \otimes \mathbb{C}, g_{\mathbb{C}})$ die Komplexifizierung des euklidischen Raumes V und $g_{\mathbb{C}}$ die entsprechende $\mathbb{C}$-bilineare Form so sei $\mathcal{C}_V^c := C(V \otimes \mathbb{C}, g_{\mathbb{C}})$. Hat man einen Isomorphismus von Vektorräumen $f : (V, g) \to (V', g')$ mit der Eigenschaft, dass $f^* g' = g$, so induziert f einen Isomorphismus der Clifford-Algebren $\tilde{f} : C(V, g) \to C(V', g')$. Man erhält daher den folgenden Satz.

3.1.2 Satz *Ist (V, g) ein komplexer Vektorraum mit bilinearer Form g und $u : V \to A$ eine Abbildung in eine assoziative unitale Algebra mit der Eigenschaft, dass $u(v)^2 = g(v, v) \cdot 1$, so faktorisiert diese Abbildung in eindeutiger Weise durch die Clifford-Algebra $C(V, g)$.*

Beweis: Man hat einen Isomorphismus $f : (V, g) \to (V, -g)$ gegeben durch $f(v) := iv$ mit $f^*(-g) = g$. Daher erhält man einen Isomorphismus der Clifford-Algebren $\tilde{f} : C(V, g) \to C(V, -g)$ und die Aussage folgt aus dem Satz 3.1.1. $\Box$

Eine Darstellung ρ einer Clifford-Algebra $C(V, g)$ ist ein Algebrenhomomorphismus $\rho : C(V, g) \to \mathrm{End}(W)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum W.

3.1.3 Definition *Ein Clifford-Modul ist ein Vektorraum W mit einer Darstellung einer Clifford-Algebra $\rho : C(V, g) \to End(W)$.*

Eine Darstellung heißt irreduzibel wenn sie sich nicht als direkte Summe zweier Darstellungen schreiben lässt. Es gilt der folgende Satz.

3.1.4 Satz *Jede Darstellung einer Clifford-Algebra lässt sich schreiben als direkte Summe irreduzibler Darstellungen.[L-M, Satz I 5.4]*

Zwei Darstellungen ρ_1 und ρ_2 heißen äquivalent, wenn ein Vektorbündelisomorphismus F existiert, so dass $F \circ \rho_1 \circ F^{-1} = \rho_2$ ist. Für die Clifford-Algebra eines komplexen Vektorraumes existieren je nach Dimension nur eine bzw. zwei nicht äquivalente Darstellungen.

3.1.5 Satz *Sei V ein komplexer Vektorraum und g eine nichtdegenerierte bilineare Form. Bezeichne ν die Anzahl der nichtäquivalenten Darstellungen der Algebra $C(V, g)$. Dann ist*

1. *$\nu = 1$, falls $\dim(V) = 0$ mod 2,*
2. *$\nu = 2$, falls $\dim(V) = 1$ mod 2.*

[L-M, Satz I 5.7]

Mit dem letzten Satz erhält man das folgende Resultat.

3.1.6 Satz *Sei V ein komplexer Vektorraum gerader Dimension mit nichtdegenerierter Bilinearform q. Sei $C(V, q)$ die dazugehörende Clifford-Algebra. Seien $\rho : C(V, q) \to End(W)$ und $\rho' : C(V, q) \to End(W)$ Darstellungen der Clifford-Algebra als Endomorphismen des Raumes W. Dann sind ρ und ρ' äquivalent.*

Beweis: Sowohl ρ als auch ρ' lassen sich als Summe irreduzibler Darstellungen schreiben. Nach dem letzten Satz sind alle diese Darstellungen paarweise äquivalent. Die Dimension von W bestimmt die Anzahl der Summanden eindeutig. Daher folgt die Aussage. □

Sei nun M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe der Riemannschen Metrik kann man das Bündel der komplexifizierten Clifford-Algebren der Kotangentialräume $\mathcal{C}^c_{T^*_xM}$ bilden. Dieses Bündel werde mit $\mathcal{C}^c(M)$ bezeichnet. Die Algebra der Schnitte dieses Bündels werde mit $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ bezeichnet.

3.1.7 Definition *Ein Clifford-Modul über der Mannigfaltigkeit M ist ein komplexes Vektorbündel $\mathcal{E}$ über M mit einer Wirkung des Clifford-Algebrenbündels als Endomorphismen von $\mathcal{E}$; $c : \mathcal{C}^c(M) \rightarrow End(\mathcal{E})$.*

Beispiel: Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und T^*V sein Kotangentialbündel. Mit der Bezeichnung $\xi_k := dx_k$ erhält man aus einer Basis $\{x_k\}_{k=1\ldots n}$ eine Basis $\{x_k, \xi_k\}_{k=1\ldots n}$. Die Metrik auf V induziert dann eine Metrik g_{T^*V} auf T^*V durch die Festlegungen

$$g_{T^*V}(x_i, x_j) := g(x_i, x_j) \ ; \ g_{T^*V}(\xi_i, \xi_j) := g(x_i, x_j)$$

sowie

$$g_{T^*V}(\xi_i, x_j) := 0 \forall i, j.$$

Man kann dann die Komplexifizierung des Raumes T^*V bilden, wobei die Metrik zu einer $\mathbb{C}$-bilinearen Abbildung fortgesetzt werde. Man hat dann den Raum $P := \mathrm{span}\{x_k + i\xi_k\}_{k=1,\ldots,n}$. Für jedes Element w dieses Raumes gilt

$$g_{T^*V}(w, w) = 0.$$

Ist $\{x_k\}_{k=1\ldots n}$ orthonormal, so gilt für die Vektoren $w_k := 2^{-1/2}(x_k + i\xi_k)$ und $\overline{w_k} := 2^{-1/2}(x_k - i\xi_k)$ die Identität

$$g_{T^*V}(w_k, \overline{w_k}) = 1; \forall k.$$

Man kann daher den Raum $\overline{P} := \mathrm{span}\{\overline{w_k}\}_{k=1,\ldots,n}$ als zu P dualen Raum mit zu $\{w_k\}$ dualer Basis $\{\overline{w_k}\}$ auffassen. Nun kann man T^*V als Mannigfaltigkeit betrachten. Über dieser Mannigfaltigkeit erhält man das Bündel $\mathcal{S}(T^*V) := \Lambda^*\overline{P}$. Auf $\mathcal{S}(T^*M)$ hat man dann eine Wirkung der komplexifizierten Clifford-Algebra $\mathcal{C}^c(T^*_x(T^*V))$ des Kotangentialraumes von T^*V, gegeben durch die Festlegungen

$$c(w) \cdot s := 2^{1/2}\varepsilon(w)s, \text{ falls } w \text{ in } P \subset T^*_x(T^*V) \otimes \mathbb{C}$$

sowie

$$c(v) \cdot s := -2^{1/2}\iota(v)s, \text{ falls } v \text{ in } \overline{P} \subset T_x^*(T^*V) \otimes \mathbb{C}.$$

□

Beispiel: Sei (M, J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit, d.h. M ist eine Mannigfaltigkeit mit einem Endomorphismus $J : TM \to TM$, so dass $J^2 = -1$. Sei $TM \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung des Tangentialraumes und $J_\mathbb{C}$ die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von J. Dann hat J die Eigenwerte $\pm i$. Bezeichne $\overline{P} := T^{0,1}M$ das Bündel der $-i$-Eigenräume dieser Abbildung und sei $\mathcal{S}(M) := \Lambda^*\overline{P}$. Entsprechend der Konstruktion im letzten Beispiel erhält man eine Wirkung des Clifford-Algebrenbündels auf $\mathcal{S}(M)$. □

Aus dem nächsten Satz folgt unmittelbar, dass die Mannigfaltigkeit TM eine fast komplexe Struktur trägt.

3.1.8 Satz *Für das Tangentialbündel $T(TM)$ der Mannigfaltigkeit TM gilt*

$$T(TM) \simeq \pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM),$$

wobei $\pi : TM \to M$ die Bündelprojektion bezeichne. Insbesondere induziert eine Riemannsche Metrik auf M durch Zurückholen eine Riemannsche Metrik auf TM.

Beweis: Sei $\{(U_i, \varphi_i)\}$ ein Atlas für die Mannigfaltigkeit M. Dann ist $\{(TU_i, D\varphi_i)\}$ ein Atlas für TM. Sei n die Dimension von M und $(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) \in \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ die lokalen Koordinaten unter der Karte $D\varphi_i$. Die Vektorfelder $\{\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n, \partial/\partial \xi_1, ..., \partial/\partial \xi_n\}$ liefern Basen der Tangentialräume von TU_i. Basen der direkten Summe $\pi^*(TU_i) \oplus \pi^*(TU_i)$ sind in diesen Koordinaten gegeben durch $\{\partial/\partial x_1 \oplus 0, ..., \partial/\partial x_n \oplus 0, 0 \oplus \partial/\partial x_1, ..., 0 \oplus \partial/\partial x_n\}$. Ein Isomorphismus T ist nun in diesen Koordinaten gegeben durch

$$T : \partial/\partial x_k \mapsto \partial/\partial x_k \oplus 0$$

sowie

$$T : \partial/\partial \xi_k \mapsto 0 \oplus \partial/\partial x_k.$$

Es ist zu zeigen, dass diese Definition invariant unter Koordinatenwechsel ist. Seien dazu $(x_1', ..., x_n', \xi_1', ..., \xi_n')$ die Koordinaten unter der Karte $D\varphi_j : TU_j \to \varphi_j(U_j) \times \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\partial/\partial x_k' = D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})\partial/\partial x_k$$

und
$$\partial/\partial\xi'_k = D(\varphi_j)\circ D(\varphi_i)^{-1}\partial/\partial\xi_k = D(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\partial/\partial\xi_k.$$
Die Übergangsfunktionen des Bündels $T(TM)$ sind in diesen Koordinaten also gegegen durch
$$\mathcal{U}_{ij} := \begin{pmatrix} D(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}) & 0 \\ 0 & D(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}) \end{pmatrix}$$
Da dies auch die Übergangsfunktionen des Bündels $\pi^*(TM)\oplus\pi^*(TM)$ sind, erhält man
$$T\mathcal{U}_{ij}\partial/\partial x_k = T\partial/\partial x'_k = \partial/\partial x'_k \oplus 0 = D(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\partial/\partial x_k \oplus 0 = \mathcal{U}_{ij}T\partial/\partial x_k$$
und
$$T\mathcal{U}_{ij}\partial/\partial\xi_k = T\partial/\partial\xi'_k = 0\oplus\partial/\partial x'_k = 0\oplus D(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\partial/\partial x_k = \mathcal{U}_{ij}T\partial/\partial\xi_k.$$
Daher ist T invariant definiert und liefert einen globalen Isomorphismus der Bündel. □

Beispiel: Sei M eine Mannigfaltigkeit und TM das Tangentialbündel. Eine fast komplexe Struktur auf TM ist in den im Beweis benutzten Bündelkoordinaten, die durch eine Karte der Form $D\varphi$ gegeben sind, definiert durch die Zuordnung $x_i \mapsto \xi_i$ und $\xi_i \mapsto -x_i$. Man erhält das Bündel $\mathcal{S}(TM)$. Der Satz 3.1.8 erlaubt es, zu einer Riemannschen Metrik g_M auf M eine kanonische Riemannsche Metrik g_{TM} auf TM durch Zurückholen der Metrik von M zu definieren. Das Bündel $T(TM)$ zerfällt nach diesem Satz in zwei Unterbündel, die isomorph zu $\pi^*(TM)$ sind. Diese Bündel stehen per Definition orthogonal aufeinander. Auf jedem der Unterbündel sei weiter $g_{TM} := \pi^*(g_M)$ definiert. Wie üblich liefert die Metrik auf M eine Identifikation von TM und T^*M. Man erhält daher ebenfalls eine Metrik sowie eine fast komplexe Struktur auf T^*M und das Bündel $\mathcal{S}(T^*M)$. □

3.2 Dirac-Operatoren

Auf dem Bündel $\mathcal{C}^c(M)$ der Clifford-Algebren ist ein kanonischer Zusammenhang gegeben, der von dem Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induziert wird. Zur Definition der Dirac-Operatoren betrachtet man Clifford-Moduln, die mit einem Zusammenhang ausgestattet sind, der mit diesem Zusammenhang auf der Clifford-Algebra kompatibel ist.

3.2.1 Definition *Sei $\mathcal{E}$ ein Clifford-Modul mit einer hermiteschen Metrik $<,>$ und metrischem Zusammenhang ∇. Für einen Einheitsvektor $v \in T_xM \subset \mathcal{C}^c(M)_x$ gelte die Identität*

$$< v \cdot e_1, v \cdot e_2 > = < e_1, e_2 > .$$

Der Zusammenhang ∇ auf $\mathcal{E}$ genüge der Identität

$$\nabla(ve) = (\nabla v) \cdot e + v \cdot (\nabla e),$$

wobei der kanonische Zusammenhang auf $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ ebenfalls mit ∇ bezeichnet werde. Dann heißt das Tripel $(\mathcal{E}, <,>, \nabla)$ ein Dirac-Bündel.

Es lässt sich auf jedem Clifford-Modul eine hermitesche Metrik und ein Zusammenhang angeben, so dass dieser Modul zu einem Dirac-Bündel wird. Daher wird der Begriff Clifford-Modul mitunter synonym mit dem Begriff Dirac-Bündel verwendet.

Der Zusammenhang auf einem Dirac-Bündel liefert mit der Einbettung des Tangentialbündels in die Clifford-Algebra eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{E} \to T^*M \otimes \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C}^c(M) \otimes \mathcal{E}.$$

Bezeichnet $\Gamma(\cdot)$ den Raum der glatten Schnitte eines Bündels, so lässt sich auf einem beliebigen Dirac-Bündel ein Differentialoperator D definieren durch

$$D : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{C}^c(M) \otimes \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E}).$$

In lokalen Koordinaten lässt sich dieser Operator schreiben als

$$Df = \sum_i^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} f),$$

wobei „·” die Clifford-Multiplikation bezeichne.

3.2.2 Definition *Sei $\mathcal{E}$ ein Dirac-Bündel. Der Differentialoperator, der in lokalen Koordinaten gegeben ist durch*

$$Df = \sum_i^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} f)$$

heißt Dirac-Operator des Dirac-Bündels $\mathcal{E}$.

Wirkt das Bündel der Clifford-Algebren von rechts, so lässt sich anlog ein rechts-Dirac-Operator definieren.

Ein Dirac-Operator $D : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ ist ein Pseudodifferentialoperator. Das Symbol dieses Operators ist gegeben durch die Abbildung

$$\sigma(D) : T^*M \to \mathrm{End}(\pi^*(\mathcal{E})),$$

$$\sigma(D) : \xi \mapsto -i\xi \in \pi^*(T^*M) \otimes \mathbb{C} \subset \pi^*(\mathcal{C}^c(M)) \subset \mathrm{End}(\pi^*(\mathcal{E})).$$ [1]

Da dann $\sigma(D)(\xi)^2 = |\xi|^2$ ist, ist D ein elliptischer Pseudodifferentialoperator. Ein Dirac-Operator über einer kompakten Mannigfaltigkeit ist daher ein Fredholm-Operator (siehe Satz P.0.16).

Beispiel: Sei M eine fast komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es wurde das Bündel $\mathcal{S}(M)$ mit einer Wirkung des Clifford-Algebrenbündels konstruiert. Der Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induziert einen Zusammenhang auf $\mathcal{S}(M)$. Mit diesen Strukturen wird $\mathcal{S}(M)$ ein Dirac-Bündel. Der Dirac-Operator auf diesem Bündel ist durch den Operator $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ gegeben, wobei $\overline{\partial}$ den Dolbeault-Operator bezeichnet. Zur Definition dieses Operators siehe [W, Seite 33]. $\square$

Ist W ein weiteres Vektorbündel über M, so erhält man durch „twisten“ mit $\mathcal{E}$ einen neuen Cliffordmodul mit der Wirkung $\mathcal{C}^c(M) \ni a \mapsto c(a) \otimes \mathrm{id}_W \in \mathrm{End}(\mathcal{E} \otimes W) \simeq \mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes \mathrm{End}(W)$. Es gilt dann offensichtlich der folgende Satz.

3.2.3 Satz *Sei $\mathcal{E}$ ein Dirac-Bündel und W ein beliebiges hermitesches Vektorbündel mit metrischem Zusammenhang. Dann ist das vertwistete Bündel ein Dirac-Bündel.*

3.3 Graduierungen auf Clifford-Algebren und Clifford-Moduln

Eine wichtige Struktur auf den Clifford-Algebren ist durch ihre Graduierungen gegeben.

[1] Der Faktor $-i$ entsteht, weil der Differentialoperator $\partial/\partial x$, der zur Konstruktion der Dirac-Operatoren entsprechend der ursprünglichen Definition verwendet wird, das Symbol $-i\xi$ hat.

3.3.1 Definition *Eine Algebra A heißt graduiert (($\mathbb{Z}_2$)-graduiert), wenn eine Zerlegung $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ als direkte Summe von Vektoräumen $A^{(0)}$ und $A^{(1)}$ existiert, die die Eigenschaft hat, dass $A^{(i)}A^{(j)} \subset A^{(i+j)}$ für $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Ein Homomorphismus $f : A \to B$ zwischen graduierten Algebren heißt graduiert, wenn $f(A^{(i)}) \subset B^{(i)}$ für $i \in \mathbb{Z}_2$. Eine ungraduierte Algebra lässt sich als graduierte Algebra aufassen durch die Festlegung $A^{(0)} = A$. Der Grad deg eines Elementes ist definiert durch $dega = i$ für $a \in A^{(i)}$. Der graduierte Kommutator $[,\hat{]}$ ist auf einer graduierten Algebra definiert durch*

$$[a,b\hat{]} := ab - (-1)^{degadegb} ba$$

für homogene Elemente a und b.

Die Graduierung einer Algebra ist gegeben durch die Eigenräume einer Involution.

3.3.2 Definition *Sei $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ eine graduierte Algebra. Die Involution ε, deren $+1$-Eigenraum durch $A^{(0)}$ und deren -1-Eigenraum durch $A^{(1)}$ gegeben ist, ist ein Algebrenautomorphismus und heißt Graduierungsoperator. Existiert eine Involution g in der Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(A)$ von A, mit der Eigenschaft, dass der Graduierungsoperator gegeben ist durch die Zuordnung $\varepsilon : a \mapsto gag$, so heißt die Algebra gerade graduiert.*

Beispiel: Die Algebra $\mathbb{M}_2$ ist gerade graduiert mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Algebra $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ mit der Graduierung $(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}})^{(0)} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{C}\}$ sowie $(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}})^{(1)} = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{C}\}$ ist nicht gerade graduiert. Dies folgt sofort aus der Kommutativität dieser Algebra.□

Eine Clifford-Algebra trägt immer eine natürliche Graduierung. Die Abbildung $v \mapsto -v$ induziert auf $\mathcal{C}^c_V$ eine Involution, die die Graduierung liefert. Es ist daher $\mathcal{C}^c(M)$ ein Bündel graduierter Algebren.

Im Fall gerader Dimension lässt sich diese Graduierung entsprechend dem folgenden Beispiel realisieren.

Beispiel: Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $2n$ mit orthonormaler Basis $e_1, ..., e_{2n}$. Das Volumenelement ω_V in der Clifford-Algebra $\mathcal{C}^c_V$ ist definiert durch

$$\omega_V := i^m e_1 \cdot ... \cdot e_{2n}.$$

Da $\omega_V^2 = 1$ und $\omega_V v = -v\omega_V$ für alle $v \in V \subset \mathcal{C}_V^c$ liefert es den Graduierungsoperator dieser Algebra;

$$\varepsilon(v) = \omega_V v \omega_V.$$

Die Clifford-Algebra eines Raumes gerader Dimension ist also gerade graduiert. □

Exakterweise sollte bei der Definition eines Volumenelementes positive Orientierung der Basis verlangen. Für die Graduierung der Algebra ist diese Orientierung allerdings ohne Bedeutung. Betrachtet man ω_V jedoch als Graduierungsoperator auf einem Vektorbündel, so liefern unterschiedliche Orientierungen unterschiedliche Graduierungen.

3.3.3 Definition *Ein Vektorbündel E heißt graduiert, wenn es in die Summe zweier Vektorbündel zerfällt; $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$. Es wird auch die Bezeichnung $E^+ := E^{(0)}$ und $E^- := E^{(1)}$ verwendet. Der Graduierunsoperator Γ^E ist der Vektorbündelendomorphismus mit dem +1-Eigenraum E^+ und -1-Eigenraum E^-. Ein Endomorphismus T eines graduierten Vektorbündels heißt gerade, wenn $T(E^{(i)}) \subset E^{(i)}$. T heißt ungerade, wenn $T(E^{(i)}) \subset E^{(i+1)}$. Ein Clifford-Modul $\mathcal{E}$ heißt graduiert, wenn er als Vektorbündel graduiert ist und die Clifford-Algebra graduiert auf diesem Bündel wirkt, d.h. es gelte $\mathcal{C}^c(M)^{(i)}\mathcal{E}^{(j)} \subset \mathcal{E}^{(i+j)}$. Ein Dirac-Bündel $\mathcal{E}$ heißt graduiert, wenn es als Clifford-Modul graduiert ist und die Bündel $\mathcal{E}^{(i)}$ orthogonal zueinander und parallel bezüglich des Zusammenhanges sind.*

Beispiel: Ist M eine fast komplexe Mannigfaltigkeit, so ist das Bündel $\mathcal{S}(M)$ ein graduiertes Dirac-Bündel mit dem durch den Levi-Civita-Zusammenhang induzierten Zusammenhang. Die fast komplexe Struktur der Mannigfaltigkeit liefert eine Orientierung durch die folgende Festlegung. Hat M die Dimension $2n$ und sind $\{e_i, J(e_i)\}_{i=1,\dots,n}$ linear unabhängig, so sei diese Basis positiv orientiert. Das Volumenelement ω_M definiert einen Graduierungsoperator auf $\mathcal{S}(M)$ mit den Eigenräumen $\mathcal{S}^+(T^*M) = \Lambda^{2k}P$ und $\mathcal{S}^-(T^*M) = \Lambda^{2k+1}P$ (vgl. [B-G-V, Lemma 3.17 und Beweis des Satzes 3.19]).□

Ist D ein Dirac-Operator auf einem graduierten Dirac-Bündel, so ist sein Symbol $\sigma(D)$ durch ungerade Endomorphismen gegeben. Daher ist D ein ungerader Operator. Bezüglich der direkten Summe $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ lässt sich D in der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Zur Definition der charakteristischen Klassen im nächsten Abschnitt wird der Begriff der graduierten Spur benötigt. Er soll an dieser Stelle eingeführt werden.

Eine Spur auf einer Algebra ist ein lineares Funktional tr mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{tr}([a,b]) = 0$, für alle Elemente der Algebra. Eine graduierte Spur („super trace") auf einer graduierten Algebra ist ein Funktional str, dass diese Eigenschaft bezüglich des graduierten Kommutators erfüllt, so dass also $\mathrm{str}([a,b\}) = 0$. Ist $\dim V = 2k$ und tr die Spur auf $\mathcal{C}_V^c$ mit $\mathrm{tr}(\mathrm{id}) = 2^{2k}$, so ist eine graduierte Spur $\mathrm{str}_{\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{C}^c(V)$ gegeben durch die Festlegung

$$\mathrm{str}_{\mathcal{S}}(a) := \mathrm{tr}(\omega_V a).$$

In diesem Fall ist $\mathrm{str}_{\mathcal{S}}$ bis auf einen Faktor die einzige graduierte Spur auf der Algebra $\mathcal{C}_V^c$. Der verbleibende Teil dieses Abschnittes dient einer konkreten Darstellung dieser Spur.

3.3.4 Definition *Sei V ein orientierter Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $\Lambda^* V$ die äußere Algebra. Für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von V erhält man mit Multiindizes I eine Orthonormalbasis $\{e_I\}$ von $\Lambda^* V$, wobei $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ für $I = (i_1, \ldots, i_k)$. Das Berezin-integral T ist die lineare Abbildung $T : \Lambda^* V \to \mathbb{R}$, die auf dieser Basis definiert ist durch*

$$T(e_I) := \begin{cases} 1 \ det(\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}) \text{ falls } I = (i_1, \ldots, i_n) \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend dieser Definition gilt für eine Volumenform ω auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit

$$\int_M \omega = \int_M T(\omega) dx.$$

Die komplexifizierte äußere Algebra eines euklidischen Vektorraumes V ist ein Clifford-Modul über der Clifford-Algebra $\mathcal{C}_V^c$ mit der Wirkung c, die definiert ist durch die Festlegung

$$c(a) := \epsilon(a) - \iota(\overline{a}),$$

wobei ϵ die äußere Multiplikation mit einem Vektor und ι die Kontraktion bezeichne. Es gilt der folgende Satz.

3.3.5 Satz *Die Symbolabbildung $\sigma : \mathcal{C}^c(V) \to \Lambda^* V \otimes \mathbb{C}$, die definiert ist durch*

$$\sigma(a) := c(a)1 \in \Lambda^* V \otimes \mathbb{C}$$

ist ein Isomorphismus von $\Lambda^* V \otimes \mathbb{C}$ und $\mathcal{C}^c(V)$, aufgefasst als Clifford-Moduln.
[B-G-V, Satz 3.5]

Es gilt dann die folgende Aussage.

3.3.6 Satz *Sei V ein Euklidischer Raum der Dimension $2k$. Jede graduierte Spur auf der Algebra $\mathcal{C}^c(V)$ ist ein skalares Vielfaches der Spur $str_{\mathcal{S}}$. Für $str_{\mathcal{S}}$ gilt*

$$str_{\mathcal{S}}(a) = (-2i)^k T \circ \sigma(a).$$

[B-G-V, Satz 3.21]

3.4 Topologische Invarianten eines Clifford-Moduls

Ist $\mathcal{E}$ ein Clifford-Modul über einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $2n$, so lässt sich die Endomorphismenalgebra von $\mathcal{E}$ schreiben als Tensorprodukt

$$\mathrm{End}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{C}^c(M) \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{C}^c(M)}(\mathcal{E}).$$

Dieser Faktorisierung entspricht eine Zerlegung der Krümmung von $\mathcal{E}$.

3.4.1 Satz *Sei ∇ der Zusammenhang des Dirac-Bündels $\mathcal{E}$. Dann zerfällt die Krümmung ∇^2 unter dem Isomorphismus End$(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{C}^c(M) \otimes$ End$_{\mathcal{C}^c(M)}(\mathcal{E})$*

$$\nabla^2 = \Omega^{\mathcal{S}} + \Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}},$$

wobei $\Omega^{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^2(M, \mathcal{C}^c(M))$ in lokalen Koordinaten durch die Formel

$$\Omega^{\mathcal{S}} = \frac{1}{4} \sum_{kl} (\Omega_M e_k, e_l) c(e_k) c(e_l)$$

gegeben ist, und Ω_M die Riemannsche Krümmung der Mannigfaltigkeit bezeichne. Die Form $\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^2(M, \mathrm{End}_{\mathcal{C}^c(M)}(\mathcal{E}))$ heißt die relative Krümmung („twisting curvature“) des Clifford-Moduls $\mathcal{E}$.
[B-G-V, Satz 3.43]

Es soll nun die relative Krümmung des Bündels $\mathcal{S}(T^*M)$ berechnet werden. Dazu werden einige Vorbemerkungen gemacht. Das Bündel P ist isomorph zu dem Tangentialbündel $T(T^*M)$. Eine Basis des Bündels P, aufgefasst als reelles Vektorbündel, ist in lokalen Koordinaten gegeben durch $\{w_k, iw_k\}_{k=1,...,n}$, wobei w_k wie im entsprechenden Beispiel des Abschnittes 3.2 definiert sei. In diesen Koordinaten ist ein Isomorphismus der Bündel gegeben durch die Zuordnung

$$\sqrt{2}w_k \mapsto x_k + \xi_k$$

sowie

$$i\sqrt{2}w_k \mapsto -x_k + \xi_k.$$

Vergleiche hierzu [W, Seiten 31-32]. Das Vektorbündel P ist ein paralleles Unterbündel von $T(T^*M) \otimes \mathbb{C}$ und der Zusammenhang ∇^P ist die Restriktion des Levi-Civita-Zusammenhangs auf P. Daher entspricht unter diesem Isomorphismus die Krümmungsform Ω_{T^*M} der Krümmungsform des Bündels P und kann als 2-Form mit Werten in $\mathrm{End}(P)$ aufgefasst werden.

3.4.2 Satz *Bezeichnet Ω_{T^*M} den Riemannschen Krümmungstensor der Mannigfaltigkeit T^*M, so ist die Krümmung von $\mathcal{S}(T^*M)$ bezüglich einer lokalen Basis $\{w_k\}$ von P gegeben durch*

$$\left(\nabla^{\mathcal{S}(T^*M)}\right)^2 = \sum_{kl} (\Omega_{T^*M} w_k, \overline{w_l}) \varepsilon(w_k) \iota(\overline{w_l})$$

Die relative Krümmung von $\mathcal{S}(T^*M)$ ist 0.

Beweis: Zunächst ist die Krümmung des Bündels P gegeben durch

$$(\nabla^P)^2 = \sum_{kl} (\Omega_{T^*M} w_k, \overline{w_l}) \varepsilon(w_k) \iota(\overline{w_l}).$$

Nach [G-H-V, Seite 328, Punkt 4.] ist dann die Krümmung des Bündels $\Lambda^* P = \mathcal{S}(T^*M)$ gegeben durch

$$\left(\nabla^{\mathcal{S}(T^*M)}\right)^2 (a_1 \wedge ... \wedge a_k) = \sum_{i=1}^{j} a_1 \wedge ... \wedge \sum_{kl} (\Omega_{T^*M} w_k, \overline{w_l}) \varepsilon(w_k) \iota(\overline{w_l}) a_i \wedge ... \wedge a_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} a_1 \wedge ... \wedge \sum_{kl} (\Omega_{T^*M} w_k, \overline{w_l}) \varepsilon(w_k) \iota(\overline{w_l}) a_i \wedge ... \wedge a_j =$$

$$= \sum_{kl} (\Omega_{T^*M} w_k, \overline{w_l}) \varepsilon(w_k) \iota(\overline{w_l})(a_1 \wedge ... \wedge a_j).$$

Mit der Bezeichnung $\mathcal{E} := \mathcal{S}(T^*M)$ ist die Form $\Omega^{\mathcal{E}}$ aus dem Satz 3.4.1 dann gegeben durch

$$\Omega^{\mathcal{E}} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j} (\Omega_{T^*M} \overline{w}_i, w_j) c(\overline{w}_i) c(w_j) + \sum_{i,j} (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) c(w_i) c(\overline{w}_j) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(2 \sum_{i \neq j} (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) c(w_i) c(\overline{w}_j) + \sum_i (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_i) (c(\overline{w}_i) c(w_i) + c(w_i) c(\overline{w}_i)) \right),$$

da $(\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) c(w_i) c(\overline{w}_j) = (\Omega_{T^*M} \overline{w}_i, w_j) c(\overline{w}_i) c(w_j)$ für $i \neq j$. Weiter ist dann aufgrund der Clifford-Relationen und der Definition der Clifford-Multiplikation

$$\frac{1}{4} \left(2 \sum_{i \neq j} (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) c(w_i) c(\overline{w}_j) + \sum_i (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_i) (c(\overline{w}_i) c(w_i) + c(w_i) c(\overline{w}_i)) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(4 \sum_{i \neq j} (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) \varepsilon(w_i) \iota(\overline{w}_j) + 2 \sum_i (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_i) \right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_j) \varepsilon(w_i) \iota(\overline{w}_j) + \frac{1}{2} \sum_i (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_i).$$

Nun ist

$$\sum_i (\Omega_{T^*M} w_i, \overline{w}_i) = \mathrm{tr} \pi^*(\Omega_M)$$

und da Ω_M eine reelle schiefsymmetrische Matrix ist, ist ihre Spur gleich 0;

$$\mathrm{tr} \Omega_M = 0$$

□

Sei nun $\mathcal{E}$ ein graduierter Clifford-Modul mit Graduierungsoperator $\Gamma_{\mathcal{E}}$ über einer orientierten Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Eine $C(M)$-wertige graduierte Spur auf $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ ist gegeben durch

$$\mathrm{str}_{\mathcal{E}}(a) := \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(\Gamma_{\mathcal{E}} a).$$

Eine $C(M)$-wertige relative graduierte Spur $\mathrm{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}} : \mathrm{End}_{\mathcal{C}^c(M)}(\mathcal{E}) \to C(M)$ auf der Algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{C}^c(M)}(\mathcal{E})$ ist definiert durch

$$\mathrm{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(F) := 2^{-n/2}\mathrm{str}_{\mathcal{E}}(\omega_M F).$$

Mit diesen Größen kann man den relativen Chern-Charakter eines Clifford-Moduls definieren als

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S}) := \mathrm{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}\exp(-\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}).$$

Im Weiteren werden noch die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse sowie die Todd-Klasse verwendet, deren Definitionen noch angegeben werden sollen. Die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse eines reellen Vektorbündels E mit Krümmung Ω ist definiert durch die Formel

$$\hat{\mathcal{A}}(E) := \det{}^{1/2}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\Omega/2}{\sinh(\Omega/2)}\right).$$

Für ein komplexes Vektorbündel E mit Krümmungstensor Ω ist die Todd-Klasse definiert. Diese ist gegeben durch

$$Td(E) = \det{}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega}{e^{\Omega}-1}\right) = \det{}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega}{e^{\Omega/2}-e^{-\Omega/2}}\right)\exp(-tr_{\mathbb{C}}(\Omega/2)).$$

Es wird in dieser Arbeit eine von der konvetionellen Schreibweise abweichende Notation verwendet. Bei [B-G-V] wird die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse des Tangentialbündels mit $\hat{\mathcal{A}}(M)$ bezeichnet. Da in dieser Arbeit sowohl die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse der Mannigfaltigkeit M als auch der Mannigfaltigkeit T^*M benötigt wird, soll das Argument der charakteristischen Klassen immer ein Vektorbündel sein. Die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse einer Mannigfaltigkeit M wird also mit $\hat{\mathcal{A}}(TM)$ bezeichnet. Die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse der Mannigfaltigkeit T^*M wird dementsprechend mit $\hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))$ bezeichnet.

Kapitel 4

K-Theorie

4.1 Grundlagen

Die grundlegenden Objekte der KK-Theorie sind die C^*- bzw. Hilbert-Moduln sowie eine spezielle Klasse von Operatoren auf diesen Moduln. In dieser Arbeit soll die Bezeichnung C^*-Modul verwendet werden.

4.1.1 Definition *Ein C^*-Modul (rechts-Modul) $\mathcal{H}$ über einer C^*-Algebra A ist ein komplexer Banach-Raum $\mathcal{H}$ mit einer A-bilinearen Abbildung $(,) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to A$, so dass mit $r, s \in \mathcal{H}$ und $a \in A$ gilt:*

$$(r, sa) = (r, s)a$$

$$(r, s) = (s, r)^*$$

$$(s, s) > 0 \text{ für } s > 0$$

$$\| \cdot \|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\| (\cdot, \cdot) \|_A}$$

Wegen der Nichtkommutativität allgemeiner C^*-Algebren ist die Unterscheidung zwischen links- und rechts-Moduln zu machen. Alle in dieser Arbeit verwendeten C^*-Moduln sind als rechts-Moduln zu verstehen.

Offensichtlich ist mit dieser Definition jeder Hilbertraum ein C^*-Modul über $\mathbb{C}$. Ein erstes interessantes Beispiel bildet der Modul der Schnitte eines Vektorbündels.

Beispiel: Sei M eine Mannigfaltigkeit und $(E, (,))$ ein hermitesches Vektorbündel über M. Der $C_0(M)$-Modul $\Gamma(E)$ der stetigen Schnitte, die im unendlichen verschwinden, ist ein C^*-Modul mit dem inneren Produkt

$$(e, f)(x) := (e(x), f(x)).$$

□

4.1.2 Definition *Ein C^*-Modul $\mathcal{H}$ heißt abzählbar erzeugt, wenn er topologisch abzählbar erzeugt ist, d.h. wenn eine abzählbare Menge $\{e_i\}$ von Elementen des Moduls existiert, so dass $\text{span}_A(\{e_i\})$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.*

4.1.3 Definition *Sei $\mathcal{H}$ ein C^*-Modul über der Algebra A. Eine Abbildung $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt adjungierbar, wenn eine Abbildung $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ existiert, so dass*

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

Wenn T adjungierbar ist, so ist es automatisch A-linear und beschränkt. Die adjungierte Abbildung T^* ist dann eindeutig. Die Menge aller adjungierbaren Abbildungen über $\mathcal{H}$ ist eine C^*-Algebra mit Involution * und wird mit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bezeichnet. [W-O,15.2.1,15.2.3,15.2.12]

Die Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist eine Verallgemeinerung der Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum für allgemeine C^*-Moduln. Auch die Algebra der kompakten Operatoren besitzt eine solche Verallgemeinerung.

4.1.4 Definition *Sei $\mathcal{H}$ ein C^*-Modul und $x, y \in \mathcal{H}$. Die Abbildung $\theta_{x,y} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die gegeben ist durch*

$$\theta_{x,y}(z) := x(y, z)$$

ist eine adjungierbare Abbildung. Die C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die erzeugt wird von allen $\theta_{x,y}$, wird mit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ heißen kompakte Endomorphismen des C^*-Moduls $\mathcal{H}$. Diese Abbildungen sind im Allgemeinen keine kompakten Operatoren im Banach-Raum Sinne. [W-O,15.2.6,15.2.7,15.2.10]

Beispiel: Die kompakten Endomorphismen des $C_0(M)$-Moduls $\Gamma(E)$ für ein hermitesches Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M sind gegeben durch die Schnitte des Bündels $\Gamma(\text{End}(E))$, die im Unendlichen verschwinden.

Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ C^*-Moduln über C^*-Algebren A_1 und A_2 sowie $\varphi : A_1 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ein Algebrenhomomorphismus. Auf dem algebraischen Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \odot_{A_1} \mathcal{H}_2$ erhält man die Bilinearform $(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2)_\varphi := (x_2, \varphi((x_1, y_1))y_2)$, wobei $\mathcal{H}_2$ als links-Modul über A_1 vermöge φ aufgefasst wird. Sei $\mathcal{O}$ der Unterraum des algebraischen Tensorproduktes, auf dem die zu $(,)_\varphi$ gehörende quadratische Form degeneriert. Dann ist $(,)_\varphi$ auf $(\mathcal{H}_1 \odot_{A_1} \mathcal{H}_2)/\mathcal{O}$ postiv definit. Der Abschluss dieses Raumes unter der Norm $\sqrt{\| (\cdot, \cdot)_\varphi \|}$ ist ein C^*-Modul und wird mit $\mathcal{H}_1 \otimes_\varphi \mathcal{H}_2$ bezeichnet ([Bla, Definition 13.5.1]).

Beispiel: Sind E und F Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M, so ist $\Gamma(E) \otimes_{C(M)} \Gamma(F) \simeq \Gamma(E \otimes F)$.

Ein weiterer wichtiger Begriff für die KK-Theorie ist der Begriff der Graduierung. Die folgenden Definitionen stammen aus [K1].

4.1.5 Definition *Eine C^*-Algebra A heißt graduiert, wenn sie eine graduierte Algebra im Sinne der Definition 3.3.1 ist, und die Involution * die Graduierung invariant lässt.*

4.1.6 Definition *Ein Modul $\mathcal{H}$ über einer graduierten Algebra A heißt graduiert, wenn $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(i)} A^{(j)} \subset \mathcal{H}^{(i+j)}$ und das innere Produkt die Eigenschaft hat, dass $(\mathcal{H}^{(i)}, \mathcal{H}^{(j)}) \subset A^{(i+j)}$. Ein Operator T auf $\mathcal{H}$ hat den Grad i, $deg(T) = i$, wenn $T\mathcal{H}^{(j)} \subset \mathcal{H}^{(i+j)}$. Dies liefert eine Graduierung auf den Algebren $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

4.1.7 Definition *Ein Morphismus zwischen graduierten Algebren oder graduierten Moduln heißt graduiert, wenn er die Graduierung invariant lässt.*

Auf einem C^*-Tensorprodukt (d.h. einer Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes zu einer C^*-Algebra) zweier C^*-Algebren existiert eine natürliche Graduierung, die gegeben ist durch $\deg(a \otimes b) = \deg a + \deg b$. Die Algebra $A \otimes B$ ist also eine graduierte Algebra. Es existiert noch ein weiteres natürliches Tensorprodukt graduierter C^*-Algebren.

4.1.8 Definition *Das Schiefprodukt ('skew-commutative product') $A \hat{\otimes} B$ zweier graduierter C^*-Algebren ist gegeben durch das Vektorraumtensorprodukt der Vektorräume A und B mit der Multiplikation und Involution, die gegeben sind durch*

$$(a \hat{\otimes} b)(x \hat{\otimes} y) := (-1)^{deg b \, deg x} ax \hat{\otimes} by,$$

sowie

$$(a\hat{\otimes}b)^* := (-1)^{\deg a \deg b} a^* \hat{\otimes} b^*.$$

Ist A oder B kommutativ (oder allgemeiner nuklear), so existiert nur eine C^*-Norm auf dem algebraischen Schiefprodukt.

Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ graduierte C^*-Moduln über A bzw. B und ist $f : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ein Algebrenmorphismus, so ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes_A \mathcal{H}_2$ ein graduierter C^*-Modul über B mit dem inneren Produkt des einfachen Tensorproduktes und der Graduierung $\deg(x \otimes y) = \deg x + \deg y$.

4.1.9 Satz *Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ graduierte C^*-Moduln über A bzw. B, so ist das Schiefprodukt $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_A \mathcal{H}_2$ der Moduln der graduierte Modul über dem Schiefprodukt der Algebren mit der Multiplikation*

$$(x\hat{\otimes}y)(a\hat{\otimes}b) := (-1)^{\deg y \deg a} xa \hat{\otimes} yb,$$

und dem inneren Produkt

$$((\xi\hat{\otimes}\zeta), (x\hat{\otimes}y)) = (-1)^{\deg\zeta(\deg\xi + \deg a)} (\xi, x)\hat{\otimes}(\zeta, y).$$

[K1, Seite 523]

Die Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)\hat{\otimes}\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ist kanonisch isomorph zu $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1\hat{\otimes}\mathcal{H}_2)$. Der Operator $T_1\hat{\otimes}T_2$ wirkt durch

$$(T_1\hat{\otimes}T_2)(x_1\hat{\otimes}x_2) := (-1)^{\deg T_2 \deg x_1} T_1 x_1 \hat{\otimes} T_2 x_2.$$

Sei nun $\mathbb{H}$ der abstrakte Hilbertraum und A eine graduierte Algebra. Man kann dann den graduierten Modul $\mathbb{H}_A := \mathbb{H} \otimes A$ konstruieren. Dessen Graduierung sei definiert durch $\mathbb{H}_A^{(0)} := \mathbb{H} \otimes A^{(0)}$. Außerdem lässt sich der zu $\mathbb{H}_A$ oppositionelle Modul $\mathbb{H}_A^{op}$ definieren, indem man $(\mathbb{H}_A^{op})^{(0)} := \mathbb{H} \otimes A^{(1)}$ setzt. Die direkte Summe dieser Moduln werde mit $\hat{\mathbb{H}}_A$ bezeichnet;

$$\hat{\mathbb{H}}_A := \mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A^{op}.$$

Es gilt das Absorptionstheorem für graduierte Moduln.

4.1.10 Satz *Ist A eine graduierte Algebra und $\mathcal{H}$ ein abzählbar erzeugter graduierter Modul über A, so gilt*

$$\hat{\mathbb{H}}_A \oplus \mathcal{H} \simeq \hat{\mathbb{H}}_A.$$

[Bla, Theorem 14.6.1]

Es soll an dieser Stelle noch die folgende Version des Satzes 17.1.4 aus [W-O] für gerade graduierte Algebren angegeben werden, die später benötigt wird.

4.1.11 Satz *Sei A eine unitale gerade graduierte Algebra und $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}}_A)$ ein ungerader selbstadjungierter Operator mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$. Dann existiert ein ungerader Operator $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$, eine ungerade partielle Isometrie $\mathcal{V}$ und ein gerader invertierbarer positiver Operator $\mathcal{R}$, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{V}$.*

Beweis: Sei ε_A der Graduierungsoperator der Algebra A und $g \in \mathcal{M}(A)$ das Element mit $\varepsilon_A(a) = gag$. Dann definiert

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}$$

den Graduierungsoperator $\varepsilon_{\mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}}_A)}$ auf $\mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}}_A)$. Als ungraduierte Algebra ist $\mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}}_A) = \mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A)$. Auf dieser Algebra ist eine kanonische Graduierung gegeben durch Adjungierung mit dem Element

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\hat{\varepsilon}$ den Graduierungsoperator $\hat{\varepsilon} : a \mapsto \hat{g}a\hat{g}$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A)$, so erhält man die graduierte Algebra $(\mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A), \hat{\varepsilon})$. Ist u das unitäre Element

$$u := 1/2 \begin{pmatrix} 1+g & 1-g \\ 1-g & 1+g \end{pmatrix},$$

so erhält man den Algebrenautomorphismus $ad(u) \in Aut(\mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A))$ durch die Zuordunung

$$ad(u) : a \mapsto uau^*.$$

Es ist dann $ad(u)(\varepsilon(a)) = \hat{\varepsilon}(ad(u)(a))$, und es definiert daher $ad(u)$ einen Isomorphismus graduierter Algebren; $ad(u) : (\mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A), \varepsilon_{\mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}}_A)}) \to (\mathcal{L}(\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A), \hat{\varepsilon})$. Der Operator $u\mathcal{F}u^*$ hat dann die Form

$$u\mathcal{F}u^* = \begin{pmatrix} 0 & F^* \\ F & 0 \end{pmatrix}$$

für ein Element F der ungraduierten Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{H}_A)$. Nach dem Satz 17.1.4 aus [W-O] existiert dann ein T mit $T \sim_{\mathcal{K}} F$, ein positives invertierbares R und eine Isometrie V mit den Eigenschaften $T = RV$ sowie $T \sim_{\mathcal{K}} VR$. Daher ist

$$\begin{pmatrix} 0 & F^* \\ F & 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} 0 & RV^* \\ RV & 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\mathcal{R} := u \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} u^* \text{ und } \mathcal{V} := u \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0 \end{pmatrix} u^*$$

und $\mathcal{T} := \mathcal{R}\mathcal{V}$ erhält man den Satz. $\square$

Zur Konkretisierung der Poincaré-Dualitätsabbildungen wird am Ende dieses Kapitels die Tatsache benötigt, dass auf einer orientierten Mannigfaltigkeit gerader Dimension eine kanonische gerade Graduierung existiert. Sei zunächst V ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension $2m$ mit positiv orientierter orthonormaler Basis $e_1, ..., e_{2m}$. Das Volumenelement ω_V in der Clifford-Algebra $\mathcal{C}_V^c$ ist definiert durch

$$\omega_V := i^m e_1 \cdot ... \cdot e_{2m}.$$

Ist $\mathcal{O}$ eine orthogonale Abbildung so gilt

$$\omega_M = \det(\mathcal{O})\hat{\mathcal{O}}(e_1 \cdot ... \cdot e_{2m}).$$

Hierbei bezeichne $\hat{\mathcal{O}} : \mathcal{C}_V^c \to \mathcal{C}_V^c$ den Algebrenisomorphismus, der auf Ebene der Clifford-Algebren von $\mathcal{O}$ induziert wird. Auf einer orientierten Mannigfaltigkeit gerader Dimension lässt sich daher das Element ω_M definieren, dass in lokalen positiv orientierten Koordinaten durch

$$\omega_M := i^m e_1 \cdot ... \cdot e_{2m}$$

gegeben ist. Da $\omega_M^2 = 1$ und $\omega_M v = -v\omega$ für alle $v \in T^*M \subset \mathcal{C}_{T*M}^c$, liefert es den Graduierungsoperator dieser Algebra aus der Definition 3.3.2;

$$\varepsilon(v) = \omega_M v \omega_M.$$

Nun lässt sich $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ als graduierter Modul über sich selbst auffassen. Als Modul besitzt $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ noch eine weitere Graduierung. Da $\omega^2 = 1$ liefert die Abbildung

$$\hat{\varepsilon} : C(M, \mathcal{C}^c(M)) \to C(M, \mathcal{C}^c(M))$$

$$v \mapsto v \cdot \omega_M$$

eine Graduierung. Diese Graduierung ist kein Algebrenhomomorphismus und liefert daher nur eine Modulgraduierung. Ist $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \varepsilon)$ die Algebra aufgefasst als Modul mit der Graduierung die durch die ursprüngliche Algebragraduierung gegeben ist und $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \hat{\varepsilon})$ derselbe Modul mit der eben beschriebenen Modulgraduierung, so sind die Moduln $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \hat{\varepsilon})$ und $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \varepsilon)$ isomorph als graduierte Moduln.

4.1.12 Satz *Die Abbildung*

$$T : (C(M, \mathcal{C}^c(M)), \varepsilon) \to (C(M, \mathcal{C}^c(M)), \hat{\varepsilon}),$$

die gegeben ist durch

$$T(v) := \omega_M \cdot v$$

ist ein Isomorphismus graduierter Moduln.

Beweis: Es gilt $T(\varepsilon v) = \hat{\varepsilon} T(v)$. $\square$

4.2 Die Gruppe $KK(A, B)$

Bezeichne G im Folgenden eine kompakte Lie-Gruppe. Wirkt die Gruppe vermöge Automorphismen auf einer C^*-Algebra A, so heißt diese Wirkung stetig, wenn die Abbildung $g \mapsto ga$ von G nach A stetig ist für jedes $a \in A$. Eine C^*-Algebra A heißt G-Algebra, wenn G stetig auf A wirkt. Eine graduierte Algebra heißt G-Algebra, wenn die Gruppenwirkung durch graduierte Automorphismen gegeben ist.

Ein G Modul $\mathcal{H}$ über einer G-Algebra ist ein C^*-Modul mit einer Wirkung der Gruppe als lineare Abbildungen, so dass $g(xa) = (gx)(ga)$ gilt und die Abbildung $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ stetig ist in der Produkttopologie. Ist der Modul graduiert, so erhalte die Gruppenwirkung die Graduierung.

Ein Homomorphismus von G-Algebren oder G-Moduln ist ein äquivarianter Algebrenhomomorphismus.

Seien A und B separable graduierte G-C^*-Algebren. Dann wird $KK^G(A, B)$ als Gruppe von Äquivalenzklassen von Kasparov-Moduln definiert.

4.2.1 Definition *Seien G eine kompakte Lie-Gruppe und A und B graduierte G-Algebren. Ein (A, B)-Kasparov-G-Modul ist ein Tupel der Form $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$,* *wobei $\mathcal{H}$ ein graduierter B-G-Modul ist. Die Algebra A wirke auf diesem Modul vermöge eines graduierten G-Algebrenmorphismus $\varphi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sei ein ungerader invarianter Operator, so dass gilt:*

$[a, \mathcal{F}\hat{]}$, $a(\mathcal{F}^2 - 1)$, $a(g\mathcal{F} - \mathcal{F})$ und $a(\mathcal{F} - \mathcal{F}^*)$ sind aus $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ für alle $a \in A$. Sind alle diese Elemente gleich 0, so heißt der Kasparov-Modul degeneriert. Zwei Kasparov-Moduln $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ und $(\mathcal{H}', \mathcal{F}')$ heißen unitär äquivalent, wenn ein G-invarianter graduierter unitärer Morphismus $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ existiert, so dass $\mathcal{F}' = U^*\mathcal{F}U$ gilt. Die Menge der Klassen unitär äquivalenter (A, B)-Kasparov-G-Moduln wird mit $\mathcal{E}^G(A, B)$ bezeichnet. Die degenerierten Moduln werden mit $\mathcal{D}^G(A, B)$ bezeichnet. Sind zwei Kasparov-Moduln $(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_i)$ unitär äquivalent, so wird

$$(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1) \simeq (\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)$$

geschrieben.

Wenn nötig wird der Morphismus φ in die Notation aufgenommen, so dass ein Kasparov-Modul dann durch ein Tripel $(\mathcal{H}, \varphi, \mathcal{F})$ gegeben ist.

Ist G die triviale Gruppe, so wird G in der Notation unterdrückt. [K2,Definition 2.2]

Ist $\varphi : B \to C$ ein Homomorphismus von G-Algebren und $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein (A, B)-Kasparov-G-Modul, so kann man den (A, C)-Kasparov-G-Modul $(\mathcal{H}\hat{\otimes}_\varphi C, \mathcal{F}\hat{\otimes}1)$ definieren. Man schreibt dann

$$\varphi_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) := (\mathcal{H}\hat{\otimes}_\varphi C, \mathcal{F}\hat{\otimes}1) \in \mathcal{E}^G(A, C).$$

Ist $(\mathcal{H}', \mathcal{F}')$ ein (C, D)-Kasparov-G-Modul, so liefert die Verknüpfung der Abbildung $C \to \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ aus der Definition des Kasparov-Moduls mit φ eine Abbildung $B \to \mathcal{L}(\mathcal{H}')$. Man erhält damit einen (B, D)-Kasparov-G-Modul, der ebenfalls mit $(\mathcal{H}', \mathcal{F}')$ bezeichnet werde. Dann ist

$$\varphi^*(\mathcal{H}', \mathcal{F}') := (\mathcal{H}', \mathcal{F}') \in \mathcal{E}^G(B, D).$$

Diese Abbildungen bilden degenerierte Moduln auf degenerierte Moduln ab.

4.2.2 Definition *Eine Homotopie von Kasparov-G-Moduln $(\mathcal{H}_0, \mathcal{F}_0)$ und $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$ aus $\mathcal{E}^G(A, B)$ ist gegeben durch einen Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}^G(A, B \otimes C([0, 1]))$ mit der Eigenschaft, dass*

$$(f_0)_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \simeq (\mathcal{H}_0, \mathcal{F}_0) \text{ bzw. } (f_1)_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \simeq (\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$$

gilt. Hierbei bezeichne $f_t : B \otimes C([0,1]) \to B$ die Auswertungsabbildung an der Stelle t. Die Menge der Homotopieklassen wird mit $KK^G(A,B)$ bezeichnet. Ist G trivial, so wird auch $KK(A,B)$ geschrieben. Homotopie von Moduln soll durch die Schreibweise

$$(\mathcal{H}_0, \mathcal{F}_0) \sim (\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$$

bezeichnet werden. [K2,Definition 2.3]

Es gilt nun der folgende Satz.

4.2.3 Satz *$KK^G(A,B)$ ist eine Gruppe mit der Addition, die definiert ist durch die Festlegung*

$$[\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1] + [\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2] := [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2].$$

[K2, Proposition 2.4]

4.2.4 Definition *Sei $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein (A,B)-G-Kasparovmodul. Ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F}')$ ein weiterer (A,B)-G-Kasparov-Modul und gilt $(\mathcal{F} - \mathcal{F}')a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, so heißt $(\mathcal{H}, \mathcal{F}')$ eine kompakte Störung von $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Man schreibt*

$$\mathcal{F} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{F}'.$$

[Bla, Definition 17.2.4]

Die Bezeichnung

$$\mathcal{F} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{F}'$$

wird auch verwendet, um auszudrücken, dass zwei adjungierbare Operatoren auf einem C^*-Modul $\mathcal{E}$ sich nur um einen kompakten Operator unterscheiden;

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E}).$$

4.2.5 Satz *Ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F}')$ eine kompakte Störung von $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ so sind $(\mathcal{H}, \mathcal{F}')$ und $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ homotop und es gilt*

$$[(\mathcal{H}, \mathcal{F}')] = [(\mathcal{H}, \mathcal{F})] \in KK^G(A,B).$$

[Bla, 17.2.5]

4.2.6 Satz *Seien A, B und C G-C^*-Algebren und $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein Modul in $\mathcal{E}^G(A,B)$. Dann ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ homotop zu einem Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{F}')$ mit der Eigenschaft, dass $g\mathcal{F}' = \mathcal{F}'$ für $g \in G$.*

Beweis: Sei
$$\mathcal{F}' := \int\limits_G g\mathcal{F} d\mu(g),$$
wobei μ das haarsche Maß auf G sei. Dann ist $\mathcal{F}'$ eine kompakte Störung von $\mathcal{F}$. Daher folgt die Aussage mit dem letzten Satz. $\square$

Beispiel: Sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus graduierter Algebren. Fasst man B als rechts-Modul über sich selbst auf und φ als Homomorphismus $\varphi : A \to B \subset \mathcal{L}(B)$, so erhält man den (A, B)-Kasparov-Modul $(B, 0)$. Es wird die Bezeichnung
$$[\varphi] := [(B, 0)] \in KK(A, B)$$
verwendet.$\square$

Für geometrische Anwendungen der KK-Theorie sind Algebren der Form $C_0(X)$ für einen lokal kompakten Raum von besonderem Interesse. Man kann zeigen, dass eine solche Algebra genau dann separabel ist, wenn X metrisierbar ist. In dieser Arbeit wurden die KK-Gruppen nur für separable Algebren definiert, da die in diesem Kontext auftretenden Räume ausschließlich Mannigfaltigkeiten oder deren Einpunktkompaktifizierungen sind und daher metrisierbar sind. Die Separabilität dieser Algebren lässt sich in diesem Fall z.B. mit dem Satz von Stone Weierstrass zeigen. In folgenden Beipielen und Sätzen wird mitunter trotzdem nur verlangt, dass X lokal kompakt ist. Die Aussagen sind dann bei entsprechender Verallgemeinerung der Definitionen immer noch richtig. Im Zweifelsfall soll „lokal kompakt“ jedoch „lokal kompakt und metrisierbar“ bedeuten.

Beispiel: Sei (X, Y) ein kompaktes Paar nach [A]. Das heißt X ist ein lokal kompakter Raum und $Y = \overline{Y} \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so dass X/Y kompakt ist. Seien des Weiteren E^+ und E^- Vektorbündel über X und $F : E^+ \to E^-$ ein Bündelhomomorphismus, so dass $F \mid_Y$ ein Isomorphismus der eingeschränkten Bündel ist. Ein solches Tripel beschreibt ein Element der relativen K-Theorie $K(X, Y)$ (vgl. [A]). In $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$ erhält man ein Element mit der folgenden Konstruktion. Zunächst lässt sich F auffassen als Modulhomomorphismus vermöge
$$(Ff)(x) := F(f(x)), f \in \Gamma(E^+), x \in X.$$
Fasst man $F \mid_Y + F \mid_Y^{-1}$ als Element der Algebra $\mathrm{End}(\Gamma(E^+ \mid_Y \oplus E^- \mid_Y)$ auf, so definiert er dort ein invertierbares Element.

Nun ist in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ der Raum der invertierbaren Elemente homotop zum Raum der unitären Elemente. Um dies zu sehen, fasst man zunächst $\mathcal{A}$ als rechts Modul über sich selbst auf. Die Multiplikation von links liefert eine Interpretation von $\mathcal{A}$ als Modulendomorphismen; $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Die Polarzerlegung liefert für ein invertierbares T ein unitäres Element $U \in \mathcal{L}(A)$, so dass $T = U|T|$([W-O, Proposition 15.3.7]). Da für den $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{K}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ und $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ nach [W-O,15.2.12], erhält man $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, denn die Multiplikatoralgebra einer unitalen Algebra ist die Algebra selbst [W-O,2.2.4]. Es ist daher $U \in \mathcal{A}$, und man erhält eine eine Homotopie von T nach U in $\mathcal{A}$ durch $T_t := U|T|^t$, $t \in [0,1]$.

Es existiert daher ein zu $F\,|_Y \oplus F\,|_Y^{-1}$ homotoper Bündelmorphismus H, der über Y durch unitäre Abbildungen gegeben ist. Man erhält einen Modul

$$\left(\Gamma(E^+) \oplus \Gamma(E^-), \begin{pmatrix} 0 & H^* \\ H & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dieser definiert ein Element aus $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$. Die Graduierung sei von der direkten Summe induziert. Die Eigenschaft, dass $H^*H - 1$ aus $\mathcal{K}(\Gamma(E^+) \oplus \Gamma(E^-))$ ist, folgt aus der Tatsache, dass dieses Element ein Endomorphismus mit kompaktem Träger ist.$\square$

Zu den Aussagen über Pseudodifferntialoperatoren in den nächsten Beispielen ziehe man den Anhang über PDO am Ende der Arbeit heran.

Beispiel: Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, so definiert das Symbol eines elliptischen PDO $P : E \to F$ der Ordnung $p > 0$ ein Element aus $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$, entsprechend der folgenden Konstruktion. Man formt zunächst den Operator $\mathcal{P} := \mathsf{P}(1 + \mathsf{P}^2)^{-1/2}$, wobei

$$\mathsf{P} := \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathcal{P}$ ein elliptischer PDO der Ordnung 0. Ist $a \in S^0(T^*M)$ ein beliebiger Repräsentant des Hauptsymbols (vgl. Definition P.0.11) von $\mathcal{P}$, so gilt $a^2 - 1 \in \mathcal{K}(\Gamma(E \oplus F))$ und $a - a^* \in \mathcal{K}(\Gamma(E \oplus F))$. Daher definiert $(\Gamma(E \oplus F), a)$ einen $(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$-Modul. Ist a' ein weiterer Repräsentant des Symbols, so ist $a - a' \in \mathcal{K}(\Gamma(E \oplus F))$ und daher ist $(\Gamma(E \oplus F), a')$ eine kompakte Störung von $(\Gamma(E \oplus F), a)$. Somit ist die Symbolklasse $[\sigma(P)] \in KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ wohldefiniert durch die Festlegung $[\sigma(P)] := [(\Gamma(E \oplus F), a)]$. $\square$

Beispiel: Sei M eine beliebige, nicht notwendigerweise kompakte Mannigfaltigkeit. Es soll gezeigt werden, dass ein elliptischer Pseudodifferentialoperator mit eigentlichem Träger ein Element aus $KK(C_0(M), \mathbb{C})$ definiert. Sei dazu

$$P : E \to F$$

ein elliptischer PDO der Ordnung $p > 0$ zwischen Vektorbündeln E und F über M. Sei $L^2(E \oplus F)$ der Hilbert-Raum der L^2-Schnitte des graduierten Bündels $E \oplus F$. Man formt den Operator $\mathcal{P} := \mathsf{P}(1 + \mathsf{P}^2)^{-1/2}$, wobei

$$\mathsf{P} := \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Tupel

$$(L^2(E \oplus F), \mathcal{P})$$

mit der Wirkung von $C_0(M)$ als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(E \oplus F)$ ist ein Kasparov-Modul und repräsentiert eine Klasse in $KK(C_0(M), \mathbb{C})$. Diese wird mit $[P]$ bezeichnet.

Es sind die Eigenschaften eines Kasparov-Moduls zu überprüfen. Hierbei genügt es, sich auf glatte f mit kompaktem Träger zu beschränken, wegen deren Dichtheit in $C_0(M)$. Zunächst ist $f(1 - \mathcal{P}^2) = f(1 + \mathsf{P}^2)^{-1}$ kompakt für alle glatten f mit kompaktem Träger, da das Bild dieses Operators in dem Sobolev-Raum $H^{2p}(\mathrm{supp}(f))$ liegt, und dessen Einbettung in $L^2(M, E \oplus F)$ nach dem Satz von Rellich kompakt ist. Die Kompaktheit des Kommutators wird wie im Beweis des Lemmas 4.2 aus [K2] mit der Methode aus [B-J] gezeigt. Der Operator $[\mathsf{P}, f]$ hat die Ordnung 0 und kompakten Träger, da der Träger von P eigentlich ist. Nun kann man den Operator $\mathcal{P}$ in der Form

$$\mathcal{P} = 2/\pi \int_0^\infty \mathsf{P}(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2)^{-1} d\lambda$$

schreiben, wobei das Integral in der starken Operatortopologie konvergiert. Damit ergibt sich für den Kommutator die Darstellung

$$[\mathcal{P}, f] = 2/\pi \int_0^\infty \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1} \left((1 + \lambda^2)[\mathsf{P}, f] + \mathsf{P}[\mathsf{P}, f]\mathsf{P}\right) \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1} d\lambda.$$

Die Operatoren unter dem Integral sind für jedes λ kompakt. Außerdem ist die Zuordnung $\lambda \mapsto \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1} ((1 + \lambda^2)[\mathsf{P}, f] + \mathsf{P}[\mathsf{P}, f]\mathsf{P}) \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1}$ stetig in der Normtopologie, und es ist $\| \mathsf{P}(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2)^{-1} \| \leq \lambda^{-1}$. Daher gilt

$$\| \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1} \left((1 + \lambda^2)[\mathsf{P}, f] + \mathsf{P}[\mathsf{P}, f]\mathsf{P}\right) \left(1 + \lambda^2 + \mathsf{P}^2\right)^{-1} \| \leq$$

$$C \min \left(\sup_{\lambda \in [0,1]} \| \left(1+\lambda^2+\mathsf{P}^2\right)^{-1} \left((1+\lambda^2)[\mathsf{P},f] + \mathsf{P}[\mathsf{P},f]\mathsf{P}\right) \left(1+\lambda^2+\mathsf{P}^2\right)^{-1} \|, \lambda^{-2} \right)$$

für eine geeignete Konstante C. Das Integral konvergiert daher in der Normtopologie. Wegen der Abgeschlossenheit des Raumes der kompakten Operatoren in dieser Topologie ist $[\mathcal{P}, f]$ also ein kompakter Operator. $\square$

4.2.7 Definition *Sei X ein lokal kompakter Raum und $C_0(X)^+$ die Unitalisierung der Algebra der im Unendlichen verschwindenden Funktionen. Sei weiter $E \subset X \times \mathbb{C}^n$ ein eingebettetes Vektorbündel, so dass der Modul der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Schnitte $\Gamma(E)$ gegeben ist durch*

$$\Gamma(E) = pC_0(X)^n$$

für eine Projektion $p \in M_n(C_0(X)^+)$. Diese Projektion lässt sich eindeutig schreiben als Summe einer Projektion $p_\infty \in \mathbb{M}_n$ und einer Funktion $\tilde{p} \in M_n(C_0(X))$;

$$p = p_\infty + \tilde{p}.$$

Dann heißt supp(E) := supp$(\tilde{p})$ der Träger des Vektorbündels.

4.3 Zusammenhang zwischen K und KK

Es existieren verschiedene Definitionen der K-Theorie Gruppen für lokal kompakte Räume, die als bekannt vorausgesetzt werden und daher hier nur kurz beschrieben werden. Atiyah definiert $K^0(X)$ für kompaktes X in [A] mit Hilfe von Vektorbündeln. Ferner hat man die Gruppe $K_0(C(X))$, die durch Äquivalenzklassen von Projektionen in der C^*-Algebra $C(X)$ gegeben ist. Siehe hierzu z.B. [H-R] oder [Bla]. Bezeichnet p die Projektion mit der Eigenschaft, dass

$$\Gamma(E) = pC(X)^n,$$

für ein eingebettetes Vektorbündel E, erhält man eine Zuordnung

$$E \mapsto \Gamma(E) \mapsto p$$

von $K^0(X)$ nach $K_0(C(X))$. Es gilt die folgende Aussage.

4.3.1 Satz *Die Zuordung*

$$E \mapsto \Gamma(E) \mapsto p$$

induziert einen Isomorphismus $K^0(X) \simeq K_0(C(X))$. [G-V-F, 3.21]

Ist der Raum X nicht kompakt, so wird zunächst die Einpunktkompaktifizierung X^+ gebildet, und $K^0(X)$ als Kern der Abbildung

$$i^* : K^0(X^+) \to K^0(+)$$

definiert, wobei

$$i : + \hookrightarrow X^+$$

die Inklusion bezeichne. Diese Definition der Gruppe $K^0(X)$ geht unter der Anwendung des Funktors C_0 über in die Definition von $K_0(C_0(X))$ für die nicht unitale Algebra $C_0(X)$ [Bla, Definition 5.5.1].

Um den Zusammenhang der verschiedenen Definitionen der K -Theorie Gruppen mit den in dieser Arbeit verwendeten KK-Gruppen herzustellen, sollen explizite Identifikationen der verschiedenen K- und KK-Gruppen angegeben werden.

4.3.2 Satz *Sei A eine unitale Algebra. Es existiert eine kanonische Isomorphie der Gruppen $K_0(A)$ und $KK(\mathbb{C}, A)$. Diese ist gegeben durch die Zuordnung*

$$[p] - [q] \mapsto (p(\mathbb{H}^+ \otimes A) \oplus q(\mathbb{H}^- \otimes A), 0),$$

wobei die Graduierung des Kasparov-Moduls von der direkten Summe herrühre. Die Umkehrung dieser Abbildung, aufgefasst als Isomorphismus

$$KK(\mathbb{C}, A) \to K_0(A),$$

heißt verallgemeinerter Fredholm-Index.[1]

Beweis: Zunächst ist ein beliebiger $(\mathbb{C}, A)$-Kasparov-Modul gegeben durch ein Element $(\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, T)$. Man kann nun zu diesem Modul den degenerierten Modul

$$((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, \hat{1})$$

hinzuaddieren, wobei $\mathbb{H}^+$ und $\mathbb{H}^-$ zwei Exemplare des abstrakten separablen Hilbertraumes seien und

$$\hat{1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Dieser und der folgende Satz gelten in allgemeinerer Form; siehe [Bla,17.5.5]. Die dortige Argumentation wird hier im Wesentlichen übernommen.

Man erhält den Modul $(\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- \oplus (\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, T \oplus \hat{1}) \sim (\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, T)$ (vgl. Satz 4.2.3). Das Absorptionstheorem von Kasparov ([Bla,13.6.2]) liefert die Äquivalenz von Kasparov-Moduln

$$((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A \oplus \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, T \oplus \hat{1}) \sim ((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, \mathcal{T})$$

für einen gewissen Operator $\mathcal{T}$. Nun ist $(\mathcal{T}^2 - 1) \in \mathcal{K} \otimes A \simeq \mathcal{K}((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A)$ und daher ist $\mathcal{T}$ in der Algebra $\mathcal{Q}(A) := \mathcal{L}((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A)/\mathcal{K} \otimes A$ invertierbar. Da A unital ist, existiert dann nach 4.1.11 eine partielle Isometrie $\mathcal{V} \in \mathcal{L}((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A)$ von der Form

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, \mathcal{V})$ homotop zu dem Modul $((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, \mathcal{T})$ ist. Es sind dann wegen $(\mathcal{V}^2 - 1) \in \mathcal{K}((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A)$ die Projektionen $p := 1 - V^*V$ sowie $q := 1 - VV^*$ kompakt. Daher ist $((\mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-) \otimes A, \mathcal{V})$ die direkte Summe eines degenerierten Moduls sowie des Moduls $(p(\mathbb{H}^+ \otimes A) \oplus q(\mathbb{H}^- \otimes A), 0)$. Da die Projektionen kompakt sind, sind dies endlich erzeugte projektive Moduln über der Algebra A und ihre Differenz definiert ein Element in $K_0(A)$. Da die Äquivalenz von Projektionen ([W-O, Definition 6.1.1]) die unitäre Äquivalenz von Kasparov-Moduln impliziert, ist die Abbildung

$$[p] - [q] \mapsto (p(\mathbb{H}^+ \otimes A) \oplus q(\mathbb{H}^- \otimes A), 0)$$

als Abbildung $K_0(A) \to KK(\mathbb{C}, A)$ wohldefiniert und surjektiv. Nun wurde gezeigt, wie aus einem beliebigen Kasparov-Modul über A zwei Projektionen aus $A \otimes \mathcal{K}$ gewonnen werden können, die diesen eindeutig definieren. Wendet man diese Konstruktion auf eine Homotopie von Kasparov-Moduln an, so erhält man entsprechend Projektionen p_t und q_t aus $A \otimes \mathcal{K} \otimes C([0,1])$. Man erhält Homotopien $p_0 \sim p_1$ sowie $q_0 \sim q_1$ und daher stimmen die von diesen Projektionen definierten Elemente in $K_0(A)$ überein ([W-O,5.2.10]). Daher ist die Abbildung $K_0(A) \to KK(\mathbb{C}, A)$ injektiv und somit ein Isomorphismus. □

Ist X nicht kompakt, so ist $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$ im Gegensatz zu $K^0(X)$ unabhängig von $KK(\mathbb{C}, C(X^+)) \simeq K_0(C(X^+))$ definiert. Es lässt sich jedoch $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$ als Untergruppe von $KK(\mathbb{C}, C(X^+))$ auffassen, und es gilt der folgende Satz.

4.3.3 Satz *Der verallgemeinerte Fredholm-Index induziert einen Isomorphismus der Untergruppen* $KK(\mathbb{C}, C_0(X)) \subset KK(\mathbb{C}, C(X^+))$ *und* $K_0(C_0(X)) \subset K_0(C(X^+))$.

Beweis:

Im letzten Satz wurde gezeigt, dass sich jedes Element der Gruppe $KK(\mathbb{C}, C(X^+))$ repräsentieren lässt als Kasparov-Modul der Form

$$(p(\mathbb{H}^+ \otimes C(X^+)) \oplus q(\mathbb{H}^- \otimes C(X^+)), 0) \sim (\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), 0).$$

Bezeichnet $+ \hookrightarrow X^+$ die Inklusion des Punktes $+$ und bezeichnet ε die entsprechende Abbildung auf der Ebene der Algebren, so ist

$$\varepsilon_*([p] - [q]) = 0 \in K_0(\mathbb{C})$$

für $[p] - [q] \in K_0(C_0(X))$ nach Definition dieser Gruppe. Da zwei Projektionen in $K_0(\mathbb{C})$ genau dann das gleiche Element definieren, wenn sie den gleichen Rang haben, haben die durch die Projektionen definierten Vektorbündel E und F die gleiche Dimension. Es existiert daher eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{M}_n$, so dass für die Fasern im Punkt $+$ gilt

$$UE_+U^* = F_+.$$

Da unitär äquivalente Kasparov-Moduln das gleiche Element in den Kasparov-Gruppen definieren, kann man von vornherein annehmen, dass $E_+ = F_+$. Nach dem Lemma von Tietze lässt sich die Identitätsabbildung dieser Fasern zu einem Isomorphismus in einer Umgebung von $+$ ausdehnen. Schneidet man diesen Isomorphismus mit einer Abschneidefunktion die in $+$ gleich 1 ist ab, so erhält man einen Morphismus $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$. Der Kasparov-Modul $(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T)$ ist dann als $(\mathbb{C}, C(X^+))$-Modul homotop zu $(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), 0)$ vermöge der Homotopie $t \mapsto t \cdot T$; $t \in [0, 1]$. Man erhält also

$$(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T) \sim (\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), 0).$$

Aus der Wahl von T folgt $T^2(+) - 1 = 0$ und daher liegt dieser Modul in $\mathcal{E}(\mathbb{C}, C_0(X)) \subset \mathcal{E}(\mathbb{C}, C_0(X^+))$. Es liegt also das Bild von $K_0(C_0(X))$ unter der Zuordnung

$$[p] - [q] \mapsto (p(\mathbb{H}^+ \otimes C(X^+)) \oplus q(\mathbb{H}^- \otimes C(X^+)), 0)$$

in $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$. Auf der anderen Seite folgt aus der Kasparov-Moduleigenschaft, dass die Vektorbündel E und F eines Moduls $(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), 0) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}, C_0(X))$ gleichen Rang haben. Daher stimmen die Bilder der Projektionen p und q, die diese Bündel definieren, in $K_0(\mathbb{C})$ überein;

$$\varepsilon_*([p] - [q]) = 0 \in K_0(\mathbb{C}).$$

Daher stimmt das Bild von $K_0(C_0(X))$ in $KK(\mathbb{C}, C(X^+))$ mit $KK(\mathbb{C}, C_0(X))$ überein. $\square$

Sei $a \in K^0(T^*M) \simeq KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ ein Element der K-Theorie des Kotangentialbündels. Dieses lässt sich repräsentieren durch die formale Differenz zweier Vektorbündel;

$$K^0(T^*M) \ni a = [E] - [F].$$

Auch in $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ lässt sich ein Element so repräsentieren, dass der graduierte Modul die gesamte Information über dass Element enthält.

4.3.4 Satz *Jedes Element der Gruppe $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ lässt sich repräsentieren durch einen Kasparov-Modul*

$$(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T)$$

der folgenden Form:

1. *Die Vektorbündel E und F sind in $T^*M \times \mathbb{C}^n$ eingebettete Bündel. Es existiert eine beschränkte Umgebung U von $M \subset T^*M$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$, so dass $E\ |_{T^*M \setminus U} = F\ |_{T^*M \setminus U} = (T^*M \setminus U) \times V$. $\Gamma(E)$ ist der positive Teil der Graduierung.*

2. *Der Operator T ist gegeben durch den Multiplikationsoperator*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \cdot \mathrm{id}_V \\ \varphi \cdot \mathrm{id}_V & 0 \end{pmatrix},$$

wobei φ eine stetige reellwertige Funktion sei, die auf U verschwindet und außerhalb einer beschränkten Umgebung U_0 von $\overline{U}$ konstant gleich 1 ist.

Beweis: Jedes Element in $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ ist nach den letzten beiden Sätzen gegeben durch einen Modul der Form

$$(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T).$$

Im Beweis des Satzes 4.3.3 wurde gezeigt, dass der Modul so gewählt werden kann, dass $E_+ = F_+$ und $T_+ = \mathrm{id}$ für den Kompaktifizierungspunkt $+$.

Seien p_E und p_F die Projektionen in $M_n(C_0(T^*M)^+)$ mit

$$\Gamma(E) = p_E C_0(T^*M)^n$$

und für F analog. Diese Projektionen p sind gegeben durch eine Summe der Form

$$p = p_\infty + \tilde{p},$$

wobei $\tilde{p}$ eine Matrix von Funktionen aus $C_0(T^*M)$ ist und $p_\infty \in \mathbb{M}_n$ die Projektion in der Matrixalgebra mit $V = p_\infty \cdot \mathbb{C}^n$ ist. Definiert man mit der Metrik $\| \cdot \|$ auf dem Bündel T^*M die Funktion

$$\psi := \arctan(\| \xi \|)\xi / \| \xi \|,$$

so gilt

$$\psi^*(\tilde{p}) \in M_n(C_0(B^*_{\pi/2}M)) \subset M_n(C_0(T^*M)).$$

Hierbei sei $B^*_{\pi/2}M \subset T^*M$ das Bündel der Kugeln mit Radius $\pi/2$ in dem Bündel T^*M. Diese Projektion definiert wiederum ein Vektorbündel $\tilde{E}$ über T^*M, welches zu E homotop ist vermöge der Homotopie

$$H_t(\xi) := t \cdot \arctan(1/t \| \xi \|) \cdot \xi / \| \xi \| \ \text{, für } t > 0 \text{ und}$$

$$H_t(\xi) = \xi \text{ , für } t = 0.$$

Wendet man diese Homotopie auf den gesamten Kasparov-Modul an, so erhält man die Vektorbündel $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$, die außerhalb einer Umgebung von $M \subset T^*M$ identisch sind, so dass mit den entsprechenden Bündelprojektionen $\tilde{p}_{(\cdot)}$ und dem entsprechenden Operator $\tilde{T}$ gilt

$$p^*_{\tilde{E}}(x) = p^*_{\tilde{F}}(x) = V \text{ , } \tilde{T}_x = 1 \text{ für alle } x \notin C_0(B^*_{\pi/2}M).$$

Ist $\varphi : T^*M \to [0,1]$ eine Funktion, die auf einer Umgebung von $B^*_{\pi/2}M \subset T^*M$ verschwindet und auf einer Umgebung von $+$ konstant 1 ist, so ist

$$\varphi\tilde{T} \sim_{\mathcal{K}} \tilde{T}.$$

Der Modul $(\Gamma(\tilde{E}) \oplus \Gamma(\tilde{F}), \varphi\tilde{T})$ hat die im Satz beschriebene Form. □

Die eben durchgeführte Deformation führt dazu, dass die resultierenden Bündel jeweils einen kompakten Träger besitzen. Es gilt also der folgende Satz.

4.3.5 Satz *Jedes Element der Gruppe $K^0(T^*M)$ lässt sich repräsentieren als Differenz zweier Vektorbündel mit kompaktem Träger im Sinne der Definition 4.2.7.*

4.4 Das Kasparov-Produkt

Das Kasparov-Produkt wird benötigt zur Definition der Paarung von K-Theorie und Homologie sowie zur Definition der Dualitätsabbildungen. In diesem Abschnitt werden nur abstrakte Definitionen gegeben, die in folgenden Abschnitten mit Beispielen unterlegt werden. Die allgemeine Form dieses Produktes lässt sich zurückführen auf ein spezielles Produkt der Form

$$KK^G(A,B) \times KK^G(B,C) \to KK^G(A,C).$$

Dieses sei zunächst definiert.

Seien $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1) \in \mathcal{E}^G(A,B)$ und $(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2) \in \mathcal{E}^G(B,C)$. Zunächst wird das Tensorprodukt

$$\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2$$

graduierter Moduln gebildet. Auf diesem Modul hat man zunächst den Operator $\mathcal{F}_1 \hat{\otimes} \mathrm{id}$. Ein Operator $\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathcal{F}_2$ lässt sich nicht ohne weiteres definieren, da $\mathcal{F}_2$ nicht B-linear ist. Es wird daher der Begriff des Zusammenhangs („connection“) eingeführt.

4.4.1 Definition *Sei T_x der Operator von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2$, der gegeben ist durch die Definition*

$$T_x : y \mapsto x \hat{\otimes} y.$$

Sein adjungierter Operator ist gegeben durch die Zuordnung

$$T_x^* : z \hat{\otimes} y \mapsto < x, z >_B y.$$

Ein Operator $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2)$ heißt $\mathcal{F}_2$-Zusammenhang, falls $[\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}, \tilde{T_x}] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2)$;

$$\tilde{T_x} := \begin{pmatrix} 0 & T_x^* \\ T_x & 0 \end{pmatrix}$$

[Bla, Definition 18.3.1]

Es gilt dann der folgende Satz.

4.4.2 Satz *Seien A und B separable G-Algebren. Dann existiert ein $\mathcal{F}_2$-Zusammenhang $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2, \mathcal{F})$ ist ein Kasparov-G-Modul.*

2. $a[\mathcal{F}_1\hat{\otimes}id, \mathcal{F}]a^* \geq 0 mod \mathcal{K}(\mathcal{H}_1\hat{\otimes}_B\mathcal{H}_2)$.

Ist $\mathcal{F}'$ ein weiterer $\mathcal{F}_2$-Zusammenhang mit diesen Eigenschaften, so sind die Moduln $(\mathcal{H}_1\hat{\otimes}_B\mathcal{H}_2, \mathcal{F})$ und $(\mathcal{H}_1\hat{\otimes}_B\mathcal{H}_2, \mathcal{F}')$ homotop in $\mathcal{E}^G(A, C)$. Das Kasparov-Produkt von $[(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)]$ und $[(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)]$ ist definiert als

$$[(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)] \otimes_B [(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)] := [(\mathcal{H}_1\hat{\otimes}_B\mathcal{H}_2.\mathcal{F})].$$

[K2, Definition 2.10][K2, Theorem 2.11][K2, Theorem 2.14]

Sei $\varphi : B \to C$ ein Homomorphismus graduierter Algebren und bezeichne $[\varphi]$ das entsprechende Element in $KK^G(A, B)$. Ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein (A, B)-G-Modul, so lässt sich leicht nachprüfen, dass mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\varphi_*[(\mathcal{H}, \mathcal{F})] = [(\mathcal{H}, \mathcal{F})] \otimes_B [\varphi].$$

Für einen (C, D)-Modul $(\mathcal{H}', \mathcal{F}')$ erhält man

$$\varphi^*[(\mathcal{H}', \mathcal{F}')] = [\varphi] \otimes_C [(\mathcal{H}', \mathcal{F}')].$$

Seien nun A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 und D graduierte separable G-Algebren. Die allgemeine Form des Kasparov-Produktes ist eine bilineare Abbildung

$$KK^G(A_1, B_1\hat{\otimes}D) \times KK^G(A_2\hat{\otimes}D, B_2) \to KK^G(A_1\hat{\otimes}A_2, B_1\hat{\otimes}B_2).$$

Diese Form des Produkts wird zur Konstruktion der Poincaré-Dualitätsabbildungen verwendet. Die Definition dieses Produktes geschieht über die folgende Hilfskonstruktion. Ist D eine graduierte G-Algebra, so ist der Homomorphismus τ_D definiert durch

$$\tau_D : KK^G(A, B) \to KK^G(A\hat{\otimes}D, B\hat{\otimes}D);$$

$$(E, F) \mapsto (E\hat{\otimes}D, F\hat{\otimes}\mathrm{id}).$$

Für $x \in KK^G(A_1, B_1\hat{\otimes}D)$ und $y \in KK^G(A_2\hat{\otimes}D, B_2)$ erhält man die Elemente $\tau_{A_2}(x) \in KK^G(A_1\hat{\otimes}A_2, B_1\hat{\otimes}D\hat{\otimes}A_2)$ sowie $\tau_{B_1}(y) \in KK^G(A_2\hat{\otimes}D\hat{\otimes}B_1, B_2\hat{\otimes}B_1) \simeq KK^G(B_1\hat{\otimes}D\hat{\otimes}A_2, B_1\hat{\otimes}B_2)$. Man definiert dann mit Hilfe des oben eingeführten Produktes und der Abbildungen τ_*

$$x \otimes_D y := \tau_{A_2}(x) \otimes_{B_1\hat{\otimes}A_2\hat{\otimes}D} \tau_{B_1}(y) \in KK^G(A_1\hat{\otimes}A_2, B_1\hat{\otimes}B_2).$$

Insbesondere erhält man ein äußeres Produkt $KK^G(A_1, B_1) \times KK^G(A_2, B_2) \to KK^G(A_1 \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2)$. Die Abbildung τ_D lässt sich nun selbst als Kasparov-Produkt realisieren. Für $x \in KK^G(A, B)$ gilt

$$\tau_D(x) = x \otimes_{\mathbb{C}} 1_D = 1_D \otimes_{\mathbb{C}} x,$$

wobei $1_D \in KK^G(D, D)$ der Modul $(D, 0)$ aus $\mathcal{E}^G(D, D)$ sei, der D als Modul über sich selbst auffasst.

Eine wichtige Eigenschaft des Kasparov-Produktes ist seine Assoziativität. Für den Fall des einfachen Produktes ist diese durch den folgenden Satz gesichert.

4.4.3 Satz *Seien A, D_1, D_2 und B separable graduierte G-Algebren. Seien desweiteren $x \in KK^G(A, D_1)$, $y \in KK^G(D_1, D_2)$ sowie $z \in KK^G(D_2, B)$ gegeben. Dann gilt*

$$(x \hat{\otimes}_{D_1} y) \hat{\otimes}_{D_2} z = x \hat{\otimes}_{D_1} (y \hat{\otimes}_{D_2} z).$$

[K2, Theorem 2.14]

Für einen Homomorphismus $\varphi : B \to C$ und $(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}^G(A, B)$ sowie $(\mathcal{H}', \mathcal{F}') \in \mathcal{E}^G(C, D)$-Modul erhält man

$$[(\mathcal{H}, \mathcal{F})] \otimes_B \varphi^*[(\mathcal{H}', \mathcal{F}')] = \varphi_*[(\mathcal{H}, \mathcal{F})] \otimes_C [(\mathcal{H}', \mathcal{F}')].$$

Die Assoziativität wird in einem folgenden Abschnitt benötigt, um die Verträglichkeit der dort eingeführten Dualitätsabbildungen mit der Homologiepaarung zu zeigen. Diese Homologiepaarung lässt sich nun durch das Kasparov-Produkt definieren.

4.4.4 Definition *Sei A eine graduierte separable C^*-Algebra und $x \in KK(\mathbb{C}, A)$ und $y \in KK(A, \mathbb{C})$. Dann ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Homologiepaarung von K-Theorie und K-Homologie definiert durch die folgende Zuordnung;*

$$< x, y > := x \otimes_A y.$$

Die Identifikation $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ erfolgt über den Index von Fredholm-Operatoren.

Im Falle der K-Theorie einer kompakten Mannigfaltigkeit hat diese Homologiepaarung eine einfache Interpretation. Um diese anzugeben sei zunächst für einen PDO auf einer Mannigfaltigkeit seine Vertwistung mit einem Vektorbündel definiert.

4.4.5 Definition *Sei $P : E \to F$ ein PDO und W ein graduiertes Vektorbündel auf auf einer Mannigfaltigkeit M. Man erhält die graduierte Algebra End(W). Bezeichne $\sigma(P)$ das Symbol des Operators P, aufgefasst als ungerader Endomorphismus des Bündels $\pi^*(E \oplus F)$, wie im Beispiel im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben. Hierbei sei $\pi : T^*M \to M$ die Bündelprojektion. Man kann dann das graduierte Bündel $W \hat{\otimes} (E \oplus F)$ sowie den Endomorphismus $id_W \hat{\otimes} \sigma(P)$ des entsprechenden zurückgeholten Bündels bilden. Fasst man diesen wiederum als Symbol auf, erhält man den vertwisteten Operator, der mit P^W bezeichnet werde und bis auf einen glättenden Operator eindeutig bestimmt ist. Ist P elliptisch, so ist auch P^W elliptisch.*

4.4.6 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $P : E \to F$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator positiver Ordnung auf M und W ein (ungraduiertes) Vektorbündel. Dann definiert P das Element $[P] = [(L^2(E \oplus F), \mathcal{P})] \in KK(C(M), \mathbb{C})$, wie im Beispiel auf Seite 46 beschrieben. Das Kasparov-Produkt der Elemente $[P] \in KK(C(M), \mathbb{C})$ und $[W] \in KK(\mathbb{C}, C(M))$ ist gegeben durch*

$$[W] \otimes_{C_0(M)} [P] = \left[\left(L^2(M, W \hat{\otimes} (E \oplus F)), \mathcal{P}^W \right) \right].$$

Fasst man das Produkt als $\mathbb{Z}$-wertige Paarung auf, so liefert es den Index des vertwisteten Operators;

$$< [W], [P] >= \textit{index}(P^W).$$

Beweis: Das Bündel W definiert ein Element in der KK-Theorie durch die Festlegung

$$[W] := [(\Gamma(W), 0)].$$

Der Operator definiert das Homologieelement

$$[P] = [L^2(M, E \oplus F), \mathcal{P})].$$

Es wurde schon festgestellt, dass der Operator P^W ein elliptischer PDO ist, wenn P elliptisch ist. Daher ist unmittelbar klar, dass der Modul

$$\left(L^2(M, W \hat{\otimes} (E \oplus F)), \mathcal{P}^W) \right)$$

ein Element in $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ definiert. Der Operator $\mathcal{P}^W$ sei hier der beschränkte Operator, der auch bei der Definition von Homologieelementen aus elliptischen Operatoren auftaucht. Außerdem ist die Isomorphie von graduierten C^*-Moduln

$$L^2(M, W \hat{\otimes} (E \oplus F)) \simeq \Gamma(W) \hat{\otimes}_{C(M)} L^2(M, E \oplus F)$$

gegeben. Vergleicht man dies mit der Definition des Kasparov-Produktes, so bleibt nachzuprüfen, dass $\mathcal{P}^W$ ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang ist. Dazu werde angenommen, dass W ein eingebettetes Vektorbündel ist; $W \subset \mathbb{C}^n \times M$.

Ist dann $x = \sum_i x_i w_i$ ein Schnitt aus $\Gamma(W)$, wobei w_i den konstanten Schnitt in dem Vektorbündel $\mathbb{C}^n \times M$ mit dem Wert $w_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ bezeichne, die 1 stehe an der i-ten Stelle, so wirkt der Operator $\mathcal{P}^W$ durch die Zuordnung

$$x \hat{\otimes} y \overset{\mathcal{P}^W}{\mapsto} \sum_i w_i \hat{\otimes} \mathcal{P} x_i y.$$

Mit dem bei der Definition des Begriffs des Zusammenhangs eingeführten Operator T_x ist dann

$$(T_x \circ \mathcal{P} - \mathcal{P}^W \circ T_x)(s) = \sum_i x_i w_i \hat{\otimes} \mathcal{P} s - \sum_i w_i \hat{\otimes} \mathcal{P} x_i s,$$

so dass also

$$(T_x \circ \mathcal{P} - \mathcal{P}^W \circ T_x)(s) = \sum_i w_i \hat{\otimes} [x_i, \mathcal{P}] s.$$

Da die Operatoren $[x_i, \mathcal{P}]$ kompakt sind und die Summe endlich ist, ist $(T_x \circ \mathcal{P} - \mathcal{P}^W \circ T_x) : L^2(M, E \oplus F) \to L^2(M, W \hat{\otimes} (E \oplus F))$ ein kompakter Operator. Mit einer analogen Rechnung erhält man, dass auch der Operator $(T_x^* \circ \mathcal{P}^W - \mathcal{P} \circ T_x^*) : L^2(M, W \hat{\otimes} (E \oplus F)) \to L^2(M, E \oplus F)$ kompakt ist. Dies zeigt, dass $\mathcal{P}^W$ ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang ist. $\square$

Im Falle einer allgemeinen separablen C^*-Algebra ist die Konstruktion des Kasparov-Produktes mit diesen einfachen Methoden nicht mehr möglich. Für dieses allgemeine Produkt wird das technische Lemma von Kasparov benötigt. Um eine möglichst explizite Darstellung in den hier benötigten Fällen zu erhalten, wird dieses Lemma in einer speziellen Version, wie sie für das Produkt über nichtkompakten Mannigfaltigkeiten genügt, bewiesen.

Zunächst lässt sich auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit für $\varepsilon > 0$ der Operatorkern

$$\delta_\varepsilon(x, y) := \begin{cases} \mu_\varepsilon(x)^{-1} \exp\left(-1/(\varepsilon - d(x, y))^2\right) & \text{für } d(x, y)^2 < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definieren, wobei d die Abstandsfunktion bezeichne, die von der riemannschen Metrik erzeugt wird. Die Funktion μ_ε ordne einem Punkt x das y-Integral der

Funktion $\exp(-1/(\varepsilon - d(x,y))^2)$ zu. Ist $\nu : M \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion, so sei zunächst $\tilde{\delta}_\nu$ durch

$$\tilde{\delta}_\nu(x,y) := \mu^{-1}_{\nu(x)} \exp\left(-1/(\nu(x) - d(x,y))^2\right)$$

definiert. Dann sei

$$\delta_\nu(x,y) := 1/2(\tilde{\delta}_\nu(x,y) + \tilde{\delta}_\nu(y,x)).$$

Diese Konstruktion sichert aufgrund der Symmetrie die Selbstadjungiertheit des durch δ_ν definierten Operators, die einige technische Argumente vereinfacht.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des technischen Lemmas von Kasparov, wie es für die Indexpaarung über einer nichtkompakten Mannigfaltigkeit benötigt wird.

4.4.7 Satz *Sei P ein Pseudodifferentialoperator auf dem Vektorbündel E über der Mannigfaltigkeit M mit der Eigenschaft, dass $(P^2-1)f \sim_{\mathcal{K}} 0$ und $[P,f] \sim_{\mathcal{K}} 0$ für jedes $f \in C_0(M)$. Es sei $\mathcal{A} \subset C(M, End(\mathcal{E}))$ die Algebra beschränkter stetiger Schnitte F des Endomorphismenbündels mit der Eigenschaft, dass $f(PF+FP) \sim_{\mathcal{K}} 0$ für alle $f \in C_0(M)$. Weiter sei $T \in \mathcal{A}$ und es gelte außerdem $T^2-1 \in C_0(M,End(\mathcal{E}))$. Sei $\mathcal{H} := L^2(M,E)$ und $\mathcal{B}$ die Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die erzeugt wird von P^2-1 und $(PT+TP)$. $\mathcal{G}$ sei der Untervektorraum von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, der von T und P aufgespannt wird.*

Dann existiert eine glatte Funktion ν, so dass die mit dieser Funktion konstruierten Operatoren $\mathcal{M} := \delta_\nu$ und $\mathcal{N} := 1 - \mathcal{M}$ die folgenden Eigenschaften haben:

1. *$\mathcal{M} \cdot C_0(M, End(\mathcal{E})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$,*
2. *$\mathcal{N} \cdot \mathcal{B} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$,*
3. *$[\mathcal{N}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Beweis:

Zu 1. Ist x ein Schnitt in dem Endomorphismenbündel mit kompaktem Träger, so ist $\mathcal{M}x$ gegeben durch einen Operatorkern mit kompaktem Träger und somit kompakt. Daher folgt die Aussage mit einem Approximationsargument.

Zu 3. Zunächst soll gezeigt werden, dass für ein geeignetes ν der Kommutator $[\mathcal{N}, P]$ in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ liegt.

Sei dazu $\{U_i\}$ eine lokal endliche Überdeckung der Mannigfaltigkeit T^*M, so dass für die Durchmesser der U_i gilt, dass $\mathrm{diam}(U_i) < 1$. Es sei $\{\epsilon_i\}_{\imath\in\mathbb{N}}$ eine Menge von Funktionen, so dass die Funktionen ϵ_i^2 eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete, lokal endliche Zerlegung der Eins bilden. Es sei außerdem G ein beliebiger PDO der Ordnung $p \leq 0$ mit der Eigenschaft, dass $[G, f] \sim_{\mathcal{K}} 0$ für alle $f \in C_0(M)$. Man erhält

$$\epsilon_i G \epsilon_i \sim_{\mathcal{K}} \epsilon_i^2 G.$$

Man betrachtet nun für $k \in \mathbb{N}$ den kompakten Operator, der gegeben ist durch die folgende Differenz

$$D_k = \epsilon_k G \epsilon_k - \epsilon_k^2 G.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sum_k D_k = \sum_k \epsilon_k G \epsilon_k - G,$$

wobei die Reihenkonvergenz in der starken Operatortopologie zu verstehen ist. Ziel ist es zunächst, zu zeigen, dass

$$\mathcal{N} \sum_k \epsilon_k G \epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N} G.$$

Dafür genügt es zu zeigen, dass $\sum \mathcal{N} D_k$ in der Normtopologie konvergiert, da $\sum \mathcal{N} D_k = \mathcal{N} \sum D_k$ und die Reihenglieder kompakt sind.

Der Übersichtlichkeit halber sei $K_k :=\mathrm{supp}(\epsilon_k)$. Für das Produkt der Operatorkerne gilt die Formel

$$\delta_\varepsilon * D_k = \int\limits_M \delta_\varepsilon(x, y) D_k(y, z) dy.$$

Hat D_k einen kompakten Träger, so ist

$$\| \delta_{\varepsilon_k} * D_k - D_k \| < (1/k)^2$$

für ein geeignetes $\varepsilon_k > 0$. Da sich D_k in jedem Falle durch solche mit kompaktem Träger in der Normtopologie approximieren lässt, gilt diese Aussage dann auch unabhängig von der Kompaktheit des Trägers. Da $D_k(x, y) = 0$, für alle $x \notin K_k$ gilt

$$\delta_\varepsilon * D_k = \int\limits_M \delta_\varepsilon(x, y) D_k(y, z) dy = \int\limits_{K_k} \delta_\varepsilon(x, y) D_k(y, z) dy.$$

Da $\{\epsilon_i^2\}$ lokal endlich ist, existiert eine glatte Funktion $\nu : M \to \mathbb{R}^+$, so dass $\nu(x) < \varepsilon_k$ für alle $x \in K_k$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\| \delta_\nu * D_k - D_k \| < (1/k)^2$$

und daher konvergiert die Reihe

$$\sum_k (\delta_\nu D_k - D_k)$$

in der Norm. Mit $\mathcal{N} := 1 - \delta_\nu$ erhält man also

$$\mathcal{N} \sum_k D_k \in \mathcal{K}$$

und somit

$$\mathcal{N} \sum_k \epsilon_k G \epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N} G.$$

Mit einer analogen Rechnung erhält man ein ν', so dass

$$\sum_k \epsilon_k G \epsilon_k (1 - \delta_{\nu'}) \sim_{\mathcal{K}} G(1 - \delta_{\nu'}).$$

Im Weiteren soll angenommen werden, dass das ursprüngliche ν schon entsprechend klein gewählt wurde, so dass dann also

$$\sum_k \epsilon_k G \epsilon_k \mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} G \mathcal{N}.$$

Für den nächsten Schritt sei $\mathcal{O} := (1 + \Delta)$. Dieser Operator ist invertierbar. Für G setzt man nun $P = \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1}P$ ein;

$$P\mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \sum_k \epsilon_k \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \mathcal{N}.$$

Mit den schon angewendeten Argumentationen lässt sich dann zeigen, dass

$$\sum_k \epsilon_k \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O} \sum_k \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \mathcal{N}.$$

Aufgrund der Lokalität von $\mathcal{O}$ gilt

$$\operatorname{supp}([\mathcal{O}, \epsilon_k] \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k) \subset (K_k \times K_k),$$

und dieser Operator ist für jedes k kompakt, da $\epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k$ den Grad -2 und $[\mathcal{O}, \epsilon_k]$ den Grad 1 hat. Dies folgt aus der Entwicklung des Symbols des Produktes zweier PDO (vgl. P.0.5). Sei nun

$$H_k := \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k.$$

Das Bild der Operatoren $H_k\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon H_k$ liegt im Definitionsbereich von $\mathcal{O}$ und die Operatoren $\mathcal{O}(H_k\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon H_k)$ sind kompakt. Es gilt $\| \mathcal{O}(H_k\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon H_k) \| \leq \| \mathcal{O} \| \| O_k\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon H_k \|$. Wie oben wählt man ε_k mit $\| \mathcal{O} \| \| H_k\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon H_k \| < (1/k)^2$. Die lokale Endlichkeit der Überdeckung erlaubt wiederum die Auswahl einer Funktion ν, mit der Eigenschaft, dass $\nu(x) < \varepsilon_k$ für alle $x \in K_k$. Man erhält dann $\| \mathcal{O} \| \| H_k\delta_\nu - \delta_\nu H_k \| < (1/k)^2$. Daher ist dann

$$P\mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O} \sum_k \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O}\mathcal{N} \sum_k \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O}\mathcal{N} \sum_k H_k.$$

Nun sind die Operatoren $\mathcal{O}\mathcal{N}(H_k - \epsilon^2 \mathcal{O}^{-1} P) = \mathcal{O}\mathcal{N}\epsilon_k[\epsilon_k, \mathcal{O}^{-1}P]$ wiederum kompakt und bei geeignetem ν erhält man wiederum

$$\mathcal{O}\mathcal{N} \sum_k \epsilon_k \mathcal{O}^{-1} P \epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{O}^{-1} P.$$

Dieselbe Argumentation liefert

$$\mathcal{N} = \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1}\mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{O}^{-1}.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$P\mathcal{N} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N} P.$$

Die Kompaktheit des Kommutators $[\mathcal{N}, T]$ ergibt sich folgendermaßen. Für jedes $f \in C_c(M)$ gilt $\| [\delta_\varepsilon, f] \| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Nun lässt sich T schreiben als Reihe bezüglich der starken Operatortopologie in der Form $T = \sum_k f_k$, wobei die f_k kompakten Träger besitzen. Der Kommutator $[\mathcal{N}, T]$ ist dann wiederum eine Reihe kompakter Operatoren und es folgt die Konvergenz dieser Reihe in der Normtopologie für geeignetes $\mathcal{N}$ mit der oben schon angewendeten Argumentation. Es gilt also $[\mathcal{N}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Zu 2. Unter 3. wurde gezeigt, dass für einen beliebigen PDO G der Ordnung $p \leq 0$ mit der Eigenschaft, dass $[f, G] \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ für alle f mit kompaktem Träger, gilt, dass $\mathcal{N}G \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N} \sum \epsilon_k G \epsilon_k$ ist. Man erhält $\mathcal{N}(P^2 - 1) \sim_{\mathcal{K}}$

$\mathcal{N}\sum \epsilon_k(P^2-1)\epsilon_k$. Nun ist $\sum \epsilon_k(P^2-1)\epsilon_k$ ein Operator mit stetigem Kern und eigentlichem Träger. Die Operatorkerne $H_k := \epsilon_k(P^2-1)\epsilon_k$ haben die Eigenschaft, dass $\mathrm{supp}(H_k) \subset K_k \times K_k$ für gewisse Kompakta in M. Wie oben wählt man passende ε_k für jedes K_k und ein ν mit $\nu < \varepsilon_k$ auf K_k, um mit diesem ν zu erhalten, dass $\| \mathcal{N} H_k \| < k^{-2}$. Man erhält damit die Konvergenz der Reihe kompakter Operatoren

$$\mathcal{N}\sum \epsilon_k(P^2-1)\epsilon_k$$

in der Normtopologie. Daher gilt

$$\mathcal{N}(P^2-1) \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N}\sum \epsilon_k(P^2-1)\epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} 0.$$

Auch für $\mathcal{N}(TP+PT)$ gilt $\mathcal{N}(TP+PT) \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{N}\sum \epsilon_k(TP+PT)\epsilon_k$ und dann wiederum $\mathcal{N}\sum \epsilon_k(TP+PT)\epsilon_k \sim_{\mathcal{K}} 0$. Also ist $\mathcal{N}(TP+PT) \sim_{\mathcal{K}} 0$ für geeignetes ν.

□

Im Abschnitt über den Thom-Isomorphismus werden einige äquivariante Konstruktionen verwendet. Es ist dort der nächste Satz von Nutzen.

4.4.8 Satz *Die kompakte Gruppe G wirke isometrisch auf der Mannigfaltigkeit M. Dann können die Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ aus dem Satz 4.4.7 G-äquivariant gewählt werden.*

Beweis: Bezeichnet $o(x)$ den Orbit von G durch den Punkt $x \in M$ so ist $o(x)$ eine kompakte Menge. Daher kann man die Funktion ν^G

$$\nu^G(x) := \min_{x \in o(x)} \nu(x)$$

definieren. Diese ist G-invariant und es gilt $0 < \nu^G \leq \nu$. Dann ist der Operatorkern δ_{ν^G} G-invariant. Es ist

$$\delta_{\nu^G}(gx, gy) = 1/2(\tilde{\delta}_{\nu^G}(gx, gy) + \tilde{\delta}_{\nu^G}(gy, gx)).$$

Der Kern $\tilde{\delta}_{\nu^G}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\delta}_{\nu^G}(gx, gy) = \mu^{-1}_{\nu^G(gx)} exp\left(-1/(\nu^G(gx) - d(gx, gy))^2\right) =$$

$$= \mu^{-1}_{\nu^G(x)} exp\left(-1/(\nu^G(x) - d(x, y))^2\right) = \tilde{\delta}_{\nu^G}(x, y).$$

Es ist also

$$\delta_{\nu^G}(gx, gy) = \delta_{\nu^G}(x, y).$$

Daher sind $\mathcal{M}^G := \delta_{\nu^G}$ und $\mathcal{N}^G := 1 - \mathcal{M}^G$ invariant bezüglich der Gruppenwirkung. Da außerdem $\nu^G \leq \nu$ haben die Operatoren $\mathcal{M}^G$ und $\mathcal{N}^G$ die Eigenschaften 1.-3. aus dem Satz 4.4.7. Aus dem Beweis dieses Satzes ist unmittelbar klar, dass man ν durch eine kleinere positive Funktion ersetzen kann. $\square$

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung des Satzes 4.4.7.

4.4.9 Satz *Sei E ein Vektorbündel und T und P Operatoren wie im Satz 4.4.7. Dann ist der Operator*

$$\mathcal{F} := \mathcal{M}^{1/2}T + \mathcal{N}^{1/2}P$$

ein Fredholm-Operator auf dem Hilbert-Raum der L^2-Schnitte von E und es gilt

$$\mathcal{F}^2 - 1 \sim_{\mathcal{K}} 0.$$

Hat man eine isometrische Wirkung einer kompakten Gruppe G auf M und E und sind T und P G-invariant, so ist

$$\mathcal{F}^G := (\mathcal{M}^G)^{1/2}T + (\mathcal{N}^G)^{1/2}P$$

G-invariant

Beweis: Aus der Eigenschaft

$$\mathcal{N}P \sim_{\mathcal{K}} P\mathcal{N}$$

folgt mit dem Funktionenkalkül, dass

$$\mathcal{N}^{1/2}P \sim_{\mathcal{K}} P\mathcal{N}^{1/2},$$

da $\mathcal{N}$ selbstadjungiert ist. Es ist dann

$$(\mathcal{M}^{1/2}T + \mathcal{N}^{1/2}P)^2 =$$

$$= \mathcal{M}T^2 + \mathcal{M}^{1/2}\mathcal{N}^{1/2}TP + \mathcal{N}^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}PT + \mathcal{N}P^2 =$$

$$= \mathcal{M}T^2 + \mathcal{M}^{1/2}\mathcal{N}^{1/2}(PT + TP) + \mathcal{N}P^2 = \mathcal{M}(T^2 - 1) + \mathcal{N}P^2 - (1 - \mathcal{M}) + 1 =$$

$$= \mathcal{M}(T^2 - 1) + \mathcal{N}(P^2 - 1) + 1 \sim_{\mathcal{K}} 1.$$

Daher ist $\mathcal{F}^2 - 1$ ein kompakter Operator und $\mathcal{F}$ ein Fredholm-Operator. Die Invarianzaussage ist unmittelbar klar. $\square$

Mit diesen Sätzen kann man nun das Kasparov-Produkt über einer nichtkompakten Mannigfaltigkeit konkret angeben.

4.4.10 Satz *Sei $P : V \to W$ ein Pseudodifferentialoperator positiver Ordnung mit eigentlichem Träger zwischen den Vektorbündeln V und W über der Mannigfaltigkeit M. Wie im Beispiel auf Seite 46 erhält man den Kasparov-Modul $[P] = [(L^2(V \oplus W), \mathcal{P})]$. Es sei außerdem $\mathcal{T} := (\Gamma(E \oplus F), T)$ ein Kasparov-Modul in $KK(\mathbb{C}, C_0(M))$. Der graduierte Hilbert-Raum der L^2-Schnitte des Vektorbündels $(E \oplus F)\hat{\otimes}(V \oplus W)$ über M werde mit $\mathcal{H}$ bezeichnet. Es existiert dann eine glatte Funktion $\nu : M \to \mathbb{R}^+$, so dass mit $\mathcal{M} := \delta_\nu$ und $\mathcal{N} := 1 - \mathcal{M}$ der Operator*

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}^{1/2} T \hat{\otimes} 1 + \mathcal{N}^{1/2} \mathcal{P}^{E \oplus F}$$

ein Fredholm-Operator auf $\mathcal{H}$ ist und das Kasparov-Produkt $\mathcal{T} \otimes_{C_0(M)} [P]$ gegeben ist durch

$$\mathcal{T} \otimes_{C_0(M)} [P] = [(\mathcal{H}, \mathcal{F})].$$

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, dass der Operator $G := \mathcal{P}^{E \oplus F}$ ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang auf $\mathcal{H}$ ist.

Diese Aussage erhält man wie im Beweis des Satzes 4.4.6, mit dem Unterschied, dass das Vertwistungsbündel graduiert ist. Man vergleiche hierzu die Definition der Algebren $A \hat{\otimes} B$ und die Definition der Operatoren des Typs $T_1 \hat{\otimes} T_2$ am Anfang des Kapitels.

Seien f_i also wieder konstante Schnitte, deren Werte eine Basis des $\mathbb{C}^n$ ergeben. Ist $x = \sum x_i f_i$, so wirkt G auf einem Element der Form $x \hat{\otimes} y$ in dem Raum $L^2(E \hat{\otimes} (V \oplus W))$ durch

$$x \hat{\otimes} y \overset{G}{\mapsto} \sum_i f_i \hat{\otimes} \mathcal{P} x_i y.$$

Liegt $x \hat{\otimes} y$ in $L^2(F \hat{\otimes} (V \oplus W))$, so ist die Wirkung gegeben durch

$$x \hat{\otimes} y \overset{G}{\mapsto} - \sum_i f_i \hat{\otimes} \mathcal{P} x_i y.$$

Ist x ein Schnitt in dem Bündel E, so ist $\deg x = 0$. Schnitte in F haben den Grad 1. Man erhält daher, dass die Operatoren

$$(T_x \circ \mathcal{P} - (-1)^{\deg x \deg \mathcal{P}} G \circ T_x)(y) = \sum_i x_i w_i \hat{\otimes} \mathcal{P} y - \sum_i w_i \hat{\otimes} \mathcal{P} x_i y = \sum_i w_i \hat{\otimes} [x_i, \mathcal{P}] y$$

kompakt sind. Zunächst gilt dies, falls die x_i glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind, da dann der Kommutator $[x_i, \mathcal{P}]$ für jedes i durch einen glatten Operatorkern mit kompaktem Träger gegegeben ist. Da die Zuordnung

$$x \mapsto T_x \circ \mathcal{P} \pm G \circ T_x$$

in der Normtopologie von $\Gamma(E \oplus F)$ stetig ist, gilt dies für alle $x \in \Gamma(E \oplus F)$. Daher ist G ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang.

Nach Satz 4.4.9 ist $\mathcal{F}$ ein Fredholm-Operator, denn $T \hat{\otimes} 1$ und $\mathcal{P}^{E \oplus F}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 4.4.7 auf dem Vektorbündel $(E \oplus F) \hat{\otimes} (V \oplus W)$.

Diese Zusammenhangseigenschaft des Operators $\mathcal{F}$ lässt sich mit der folgenden Argumentation einsehen. Vergleiche dazu [Bla, Satz 18.3.4]. Zunächst ist $\mathcal{M}$ ein 0-Zusammanhang, da sowohl $T_x \mathcal{M}$ als auch $\mathcal{M} T_x^*$ kompakte Operatoren zwischen den entsprechenden Räumen sind. Dann ist auch $\mathcal{M}^{1/2}$ ein 0-Zusammenhang und ebenso $\mathcal{M}^{1/2} F$ für einen beliebigen Operator F mit $[\mathcal{M}, F] \sim_{\mathcal{K}} 0$. Es ist also $\mathcal{M}^{1/2} T \hat{\otimes} \mathrm{id}$ ein 0-Zusammenhang.

Weiterhin sind $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}^{1/2}$ 1-Zusammenhänge und da das Produkt eines 1-Zusammenhangs mit einem $\mathcal{P}$-Zusammenhang wieder ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang ist, ist $\mathcal{N}^{1/2} G$ ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang. Da die Summe eines 0-Zusamenhangs mit einem $\mathcal{P}$-Zusammenhang ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang ist, ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{P}$-Zusammenhang. Da nun $\varphi[T \hat{\otimes} 1, \mathcal{F}] \in \mathcal{K}$ für $\varphi \in C_0(M)$ definiert der Operator $\mathcal{F}$ das Kasparovprodukt der Moduln (vgl. Satz 4.4.2). $\square$

4.5 Der Thom-Isomorphismus

Sei G wieder eine kompakte Lie-Gruppe und $P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel. Ist A eine Algebra mit einer Wirkung der Gruppe G, so werde die Unteralgebra der G-invarianten Elemente von A mit A^G bezeichnet. Eine analoge Bezeichnung werde für Moduln mit G-Wirkung verwendet. Hat man einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ mit einer Wirkung von G gegeben, so lässt sich das Feld von Hilbert-Räumen

$$P \times_G \mathcal{H}$$

sowie der $C(M)$-Modul seiner stetigen Schnitte

$$(C(P) \otimes \mathcal{H})^G$$

definieren [2]. Ist $\mathcal{A}$ ein G-invarianter Operator auf $\mathcal{H}$, so kann man außerdem den Operator

$$\mathcal{A}_M := \mathrm{id} \otimes \mathcal{A}$$

auf dem Modul $(C(P) \otimes \mathcal{H})^G$ konstruieren. Dies ist ein $C(M)$-Modul Endomorphismus. Mit diesen Konstruktionen lässt sich jedem Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ aus $\mathcal{E}^G(A, B)$ mit der Eigenschaft, dass $g\mathcal{F} = \mathcal{F}$ ist, ein $((C(P) \otimes A)^G, (C(P) \otimes B)^G)$-Kasparov-Modul zuordnen. Diese Zuordnung ist gegeben durch

$$(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \mapsto ((C(P) \otimes \mathcal{H})^G, \mathcal{F}_M).$$

Da jeder Modul in $\mathcal{E}^G(A, B)$ homotop zu einem Modul mit äquivariantem $\mathcal{F}$ ist, liefert sie eine Abbildung

$$j_P : KK^G(A, B) \to KK((C(P) \otimes A)^G, (C(P) \otimes B)^G).$$

Es gilt der folgende Satz.

4.5.1 Satz *Die Abbildung j_P kommutiert mit dem Kasparov-Produkt. Ist $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$ ein (A, B)-Kasparov-G-Modul und $(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)$ ein (B, C)-Kasparov-G-Modul, so gilt*

$$j_P((\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1) \otimes_B (\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)) = j_P((\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)) \otimes_{(C(P) \otimes B)^G)} j_P((\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2))).$$

Beweis: Zunächst ist das Produkt der Moduln $(C(P) \otimes \mathcal{H}_1)^G$ und $(C(P) \otimes \mathcal{H}_2)^G$ gegeben durch

$$(C(P) \hat{\otimes} \mathcal{H}_1)^G \hat{\otimes}_{(C(P) \otimes B)^G} (C(P) \hat{\otimes} \mathcal{H}_2)^G \simeq (C(P) \hat{\otimes} \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2)^G.$$

Nach Satz 4.2.6 lässt sich der Modul $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1) \otimes_B (\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)$ durch einen G-Modul $(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2, \mathcal{F})$ repräsentieren, so dass $g\mathcal{F} = \mathcal{F}$ für alle $g \in G$ gilt. Dann definiert der Operator $\mathcal{F}_M = \mathrm{id} \otimes \mathcal{F}$ einen Operator in $\mathcal{L}(C(P) \otimes \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2)$ und

$$j_P((\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1) \otimes_B (\mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2) = \big((C(P) \hat{\otimes} \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_B \mathcal{H}_2)^G, \mathcal{F}_M\big)$$

[2] Es wird nicht gezeigt, dass $P \times_G \mathcal{H}$ ein Hilbert-Raumfeld im Sinne von [D] ist, und dass $(C(P) \otimes \mathcal{H})^G$ der Modul seiner stetigen Schnitte ist, da dies nicht benötigt wird. Im Kontext dieser Arbeit seien dies nur Bezeichnungen für die angegebenen Objekte.

Aus der Tatsache, dass $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{F}_2$ Zusammenhang ist, folgt, dass $\mathcal{F}_M$ ein $(\mathcal{F}_2)_M$ Zusammenhang ist. Die Kommutatoreigenschaft $b[(\mathcal{F}_1)_M\hat{\otimes}\mathrm{id}, \mathcal{F}_M]b^* \geq 0$ mit $b \in (C(P)\otimes B)^G$ folgt aus der analogen Eigenschaft für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_1$. Daher ist $\mathcal{F}_M$ ein Kasparov-Produkt für $\big((C(P) \otimes \mathcal{H}_1)^G, (\mathcal{F}_1)_M\big)$ und $\big((C(P) \otimes \mathcal{H}_2)^G, (\mathcal{F}_2)_M\big)$. Dies ist die Aussage des Satzes.
□

Sei nun M eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. $P \to M$ sei das Hauptfaserbündel der Orthogonalbasen des Tangentialbündels von M und G sei die Gruppe $O(n)$. Man erhält damit einen Homöomorphismus

$$TM \simeq P \times_G \mathbb{R}^n.$$

Bekanntermaßen hat man kanonische Isomorphien

$$C_0(TM) \simeq (C(P) \otimes C_0(\mathbb{R}^n))^G$$

oder z.B.

$$C(M, \mathcal{C}^c(M)) \simeq (C(P) \otimes \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})^G.$$

Bezeichne $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})$ die Abbildung die $\xi \in \mathbb{R}^n$ den Endomorphismus

$$\lambda(\xi) \cdot v := \xi(1 + |\xi|^2)^{-1/2} \cdot v \text{ für } v \in \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$$

der Clifford-Algebra zuordnet. Analog dazu sei $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})$ mit der rechten Clifford-Multiplikation definiert,

$$\rho(\xi) \cdot v := v \cdot \xi(1 + |\xi|^2)^{-1/2}$$

sowie ρ^ε durch

$$\rho^\varepsilon(\xi) \cdot v := \varepsilon(v) \cdot \xi(1 + |\xi|^2)^{-1/2}$$

und

$$\rho^{i\varepsilon}(\xi) \cdot v := i\varepsilon(v) \cdot \xi(1 + |\xi|^2)^{-1/2},$$

wobei ε der Graduierungsoperator auf der Clifford-Algebra sei. Mit diesen Bezeichnungen und Konstruktionen lassen sich diese Elemente als Symbole von „Dirac"-Operatoren auffassen. So definiert

$$\lambda_M := 1 \otimes \lambda \in (C(P) \otimes \mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n))^G$$

das Symbol des Operators $i \cdot d_M(1+\Delta)^{-1/2}$, wobei d_M den de Rham-Operator auf M bezeichne. Der mit dem Symbol $i\lambda_M$ auf M gebildete beschränkte Dirac-Operator soll im folgenden mit $\mathcal{D}^{\lambda_M}$ bezeichnet werden. Analog erhält man die Dirac-Operatoren $\mathcal{D}^{\rho_M}$ und $\mathcal{D}^{\rho^\varepsilon_M}$. Im Superscript ist also die Wirkung der Clifford-Algeba, mit der der Dirac-Operator definiert wird, angegeben. Ist M kompakt, so sind diese Operatoren bis auf eine kompakte Störung eindeutig definiert. Man erhält modulo $\mathcal{K}$ eine Identität

$$\mathcal{D}^{\lambda_M} f = (1+\Delta)^{-1/2} \sum_i^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} f).$$

In den geometrischen Anwendungen der KK-Theorie tauchen wiederholt einige kanonische Moduln auf, die an dieser Stelle eingeführt werden sollen.

Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n))$$

mit der natürlichen, von der Clifford-Algebra induzierten, Graduierung. Mit der Funktion $\psi(x) := (1+|x|^2)^{-1/2}$ lässt sich auf $\mathcal{H}$ ein G-invarianter Operator definieren durch

$$\mathcal{A} := \rho^\varepsilon + \psi \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}}.$$

Dieser Operator $\mathcal{A}$ ist ein Fredholm-Operator mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{A}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$. Da $\psi = (1-\rho^{\varepsilon 2})^{1/2}$ ist

$$\mathcal{A}^2 = (\rho^\varepsilon + \psi \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})^2 \sim_{\mathcal{K}}$$

$$\rho^{\varepsilon 2} + \rho^\varepsilon \psi \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}} + \psi \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}} \rho^\varepsilon + \psi^2 (\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})^2 \sim_{\mathcal{K}}$$

$$\sim_{\mathcal{K}} \rho^{\varepsilon 2} + \psi[\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}}, \rho^\varepsilon\hat{]} + \psi^2 (\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})^2 \sim_{\mathcal{K}} \rho^{\varepsilon 2} + \psi^2((\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})^2 - 1) + 1 - \rho^{\varepsilon 2} \sim_{\mathcal{K}} 1.$$

Man erhält einen Kasparov-Modul $\mathcal{I} := (\mathcal{H}, \mathcal{A})$ in $\mathcal{E}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Ein weiterer Kasparov-Modul in $\mathcal{E}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist durch die folgende Konstruktion gegeben.

Sei $\mathcal{G} := L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$. Für $\omega \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathrm{l}_+(v)\omega := \epsilon(v)\omega + \iota(v)\omega,$$

wobei $\epsilon(v)$ die äußere Multiplikation mit dem Vektor v bezeichne und $\iota(v)$ die Kontraktion mit dem zu v dualen Vektor bezüglich des kanonischen Skalarproduktes sei. Bezeichne nun $\widetilde{\mathrm{l}_+}$ die Funktion $\mathbb{R}^n \mapsto \mathrm{End}(\Lambda^* \mathbb{R}^n)$;

$$\widetilde{\mathrm{l}_+}(x) := \mathrm{l}_+(x)(1+|x|^2)^{-1/2}.$$

Es lässt sich ein Multiplikationsoperator auf $\mathcal{G}$ definieren, indem man für eine Funktion $f \in \mathcal{G}$

$$\widetilde{1_+} : f \mapsto \widetilde{1_+} f$$

setzt, wobei

$$\left(\widetilde{1_+} f\right)(\cdot) := \widetilde{1_+}(\cdot) f(\cdot).$$

Bezeichnet $\mathcal{D}$ den de Rham-Operator, so sei

$$\mathcal{T} := \widetilde{1_+} + \psi \mathcal{D}(1+\Delta)^{-1/2}.$$

Das Tupel $(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ ist ein Kasparov-Modul und definiert ein Element in $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

4.5.2 Satz *Es ist* $[(\mathcal{H}, \mathcal{A})] = [(\mathcal{G}, \mathcal{T})] = 1_{\mathbb{C}} \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beweis: Nach [K2, Bemerkung 1, Seite 160] ist $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ isomorph zum Repräsentationsring $R(O(n))$, und nach [K3, Satz 5, Seite 774] ist $(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ gleich 1 in $R(O(n))$.

Sei nun $U : \Lambda^* \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ der Isomorphismus, der gegeben ist durch die Zuordnung $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$. Für $v \in V$ sei $\mathrm{r}^{\varepsilon}_{-}(v) := U^* \rho^{\varepsilon}(v) U$. Dann kommutiert $\mathcal{D}$ graduiert mit $\mathrm{r}^{\varepsilon}_{-}$, da $\mathcal{D} = U^* \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}} U$ und $[\rho^{\varepsilon}(v), \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}}] = 0$. Der Operator $\hat{\mathcal{T}} := \mathrm{r}^{\varepsilon}_{-} + \psi \mathcal{D}$ ist wiederum ein Fredholm-Operator mit $\hat{\mathcal{T}}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$. Es ist dann $(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ homotop zu $(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{T}})$ vermöge der Homotopie $(\mathcal{G} \otimes C([0,1]), t\hat{\mathcal{T}} + \sqrt{1-t^2}\mathcal{T})$. Dann ist $\mathcal{H} = U\mathcal{G}$ sowie $\mathcal{A} = U \hat{\mathcal{T}} U^*$ und somit ist der Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ unitär äquivalent zu $(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{T}})$. Daher ist $[(\mathcal{H}, \mathcal{A})] = [(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{T}})] = [(\mathcal{G}, \mathcal{T})]$. □

Mit den Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ aus dem Satz 4.4.7 lässt sich auf $\mathcal{G}$ der Operator $\mathcal{F}$ definieren;

$$\mathcal{F} := \mathcal{M}^{1/2} \widetilde{1_+} + \mathcal{N}^{1/2} \mathcal{D}.$$

Das Tupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ definiert einen Kasparov-Modul nach Satz 4.4.9. Wählt man $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ G-invariant, so ist der Operator $\mathcal{F}$ ein G-invarianter Fredholm-Operator, da $\widetilde{1_+}$ und $\mathcal{D}$ G-invariant sind.

4.5.3 Satz *Der Kasparov-Modul* $(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ *ist homotop zu* $(\mathcal{G}, \mathcal{F}^G)$ *in* $\mathcal{E}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beweis: Die Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ seien G-invariant gewählt. Eine Homotopie der Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$(t\mathcal{M} + (1-t))^{1/2} \widetilde{1_+} + (t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2} \mathcal{D}\ ,\ 0 \le t \le 1.$$

Für diese Operatoren gilt

$$((t\mathcal{M} + (1-t))^{1/2}\widetilde{1_+} + (t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}\mathcal{D})^2 \sim_{\mathcal{K}}$$

$$(t\mathcal{M}+(1-t))\widetilde{1_+}^2+(t\mathcal{N}+(1-t)\psi^2)\mathcal{D}^2+(t\mathcal{M}+(1-t))^{1/2}(t\mathcal{N}+(1-t)\psi^2)^{1/2}[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}].$$

Da $\mathcal{M}\widetilde{1_+}^2 + \mathcal{N}\mathcal{D}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$ und $\widetilde{1_+}^2 + \psi^2\mathcal{D}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$ erhält man

$$((t\mathcal{M} + (1-t))^{1/2}\widetilde{1_+} + (t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}\mathcal{D})^2 \sim_{\mathcal{K}}$$

$$\sim_{\mathcal{K}} 1 + (t\mathcal{M} + (1-t))^{1/2}(t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}].$$

Es genügt nun zu zeigen, dass der Operator $(t\mathcal{N}+(1-t)\psi^2)^{1/2}[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}]$ kompakt ist, da dann

$$((t\mathcal{M} + (1-t))^{1/2}\widetilde{1_+} + (t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}\mathcal{D})^2 \sim_{\mathcal{K}} 1.$$

Zunächst gilt, dass $\psi^2[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}] \in \mathcal{K}$, da der Kommutator ein PDO der Ordnung -1 ist.

Nach Konstruktion ist außerdem $\mathcal{N}[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}] \in \mathcal{K}$. Da der Operator $(t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)$ selbstadjungiert ist, lässt sich $(t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}$ nach dem Satz von Stone-Weierstrass ([We, Satz VIII.4.7]) durch Polynome in diesem Opertor in der Normtopologie approximieren. Da für jedes Polynom P der Operator $P(t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}]$ kompakt ist, ist also auch $(t\mathcal{N} + (1-t)\psi^2)^{1/2}[\widetilde{1_+}, \mathcal{D}]$ ein kompakter Operator. □

Es seien nun zunächst zwei Elemente der Gruppen $KK(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}, C_0(\mathbb{R}^n))$ sowie $KK(C_0(\mathbb{R}^n), \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})$ durch die Festlegungen

$$\tau := (L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}), \mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}}) \in KK(C_0(\mathbb{R}^n), \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})$$

sowie

$$\kappa := (C_0(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}), \rho^\varepsilon) \in KK(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}, C_0(\mathbb{R}^n))$$

definiert. Dann gilt der folgende Satz.

4.5.4 Satz *Es ist*

$$\kappa \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \tau = 1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}}$$

sowie

$$\tau \otimes_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} \kappa = 1_{C_0(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis:

1. $\kappa \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \tau = 1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}}$

   Zunächst ist das Produkt der Moduln gegeben durch

   $$\mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n)\hat{\otimes}_{C_0(\mathbb{R}^n)} L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n)).$$

   Das Kasparov-Produkt der Operatoren ist nach Satz 4.4.10 gegeben durch den Operator

   $$\mathcal{M}^{1/2}\rho^\varepsilon\hat{\otimes}1 + \mathcal{N}^{1/2}1\hat{\otimes}\mathcal{D}^\lambda_{\mathbb{R}^n}.$$

   Wendet man die unitäre Äquivalenz $U : \Lambda^*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^c(\mathbb{R}^n)$ aus dem Beweis des Satzes 4.5.2 an, so geht dieser Operator über in den Operator

   $$\mathcal{M}^{1/2}\rho^\varepsilon\hat{\otimes}1 + \mathcal{N}^{1/2}1\hat{\otimes}\mathcal{D}$$

   auf $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$, wobei $\mathcal{D}$ wieder der de Rham Operator sei. Auf diesem Hilbert-Raum hat man einen weiteren Operator gegeben durch

   $$\mathcal{T} := \mathcal{M}^{1/2}1\hat{\otimes}\widetilde{1_+} + \mathcal{N}^{1/2}1\hat{\otimes}\mathcal{D} = 1\hat{\otimes}(\mathcal{M}^{1/2}\widetilde{1_+} + \mathcal{N}^{1/2}\mathcal{D}).$$

   Es soll gezeigt werden, dass das Tupel $(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n)), \mathcal{T})$ ebenfalls ein Kasparov-Modul ist, der das Kasparov-Produkt der Operatoren definiert. Zunächst ist $\mathcal{T}$ ein Fredholm-Operator und es gilt $\mathcal{T}^2 \sim_{\mathcal{K}} 1$ sowie $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{T}^*$, da $\mathcal{M}^{1/2}\widetilde{1_+} + \mathcal{N}^{1/2}\mathcal{D}^\lambda_{\mathbb{R}^n}$ nach Satz 4.4.9 diese Eigenschaften hat.

   Die Algebra $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ wirkt von links auf $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$ durch

   $$a(x\hat{\otimes}y) = (ax)\hat{\otimes}y,$$

   wobei $a, x \in \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ und und $y \in L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$ seien. Daher kommutiert der Operator $\mathcal{T}$ mit der Wirkung von $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ im graduierten Sinne. Da $\mathcal{T}$ außerdem linear bezüglich der rechts-Modul-Wirkung der Algebra $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$ ist, die durch

   $$(x\hat{\otimes}y)a = x\hat{\otimes}(ya)$$

   gegeben ist, erfüllt das Tupel $(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}\hat{\otimes}L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n)), \mathcal{T})$ also alle Eigenschaften eines Kasparov-Moduls.

Nach Definition des Kasparov-Produktes in Satz 4.4.2 genügt es dann zu zeigen, dass der Operator $\mathcal{T}$ ein $\mathcal{D}$-Zusammenhang ist, und dass $[\rho^\varepsilon \hat{\otimes} 1, \mathcal{T}] \sim_{\mathcal{K}} 0$. Da $\mathcal{M}^{1/2} 1 \hat{\otimes} \widetilde{1_+}$ ein 0-Zusammenhang und $\mathcal{N}^{1/2} 1 \hat{\otimes} \mathcal{D}$ ein $\mathcal{D}$-Zusammenhang ist, folgt die Zusammenhangseigenschaft. Außerdem kommutieren sowohl $1 \hat{\otimes} \widetilde{1_+}$ als auch $1 \hat{\otimes} \mathcal{D}^\lambda_{\mathbb{R}^n}$ im graduierten Sinne mit $\rho^\varepsilon \hat{\otimes} 1$. Es folgt daher die Kommutatoreigenschaft und somit definiert das Tupel $(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n} \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n)), \mathcal{T})$ das Kasparov-Produkt $\kappa \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \tau$.

Nun wirkt die Algebra $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ von rechts durch

$$(x \hat{\otimes} y) a = x \hat{\otimes} (ya),$$

wobei $a \in \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$, $y \in L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$ sowie $x \in \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ seien. Diese Modulwirkung ist homotop zu der Wirkung

$$(x \hat{\otimes} y) a = (xa) \hat{\otimes} y,$$

wobei $a, x \in \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ und $y \in L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n))$ seien, vermöge der Homotopie

$$(x \hat{\otimes} y) a(t) = x a(t)^t \hat{\otimes} y a(t)^{1-t}$$

für $a(\cdot) \in C([0,1]) \otimes \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$. Diese Homotopie liefert eine Homotopie von Kasparov-Moduln und $\kappa \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \tau$ ist somit homotop zu dem äußeren Kasparov-Produkt

$$1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} \otimes_{\mathbb{C}} [(L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^*(\mathbb{R}^n)), \mathcal{M}^{1/2} \widetilde{1_+} + \mathcal{N}^{1/2} \mathcal{D}^\lambda_{\mathbb{R}^n})].$$

Mit Satz 4.5.3 erhält man dann

$$\kappa \otimes_{C_0(\mathbb{R}^n)} \tau = 1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}}.$$

2. $\tau \otimes_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} \kappa = 1_{C_0(\mathbb{R}^n)}$

   Diese Aussage folgt mit ähnlichen Argumenten wie die erste. Es werden daher nur die wesentlichen Umformungen angegeben. Das Produkt der Moduln ist gegeben durch

   $$L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}) \hat{\otimes}_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} C_0(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}) \simeq C_0(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}).$$

   Das Produkt der Operatoren ist unter dieser Isomorphie gegeben durch

   $$1 \otimes (\mathcal{M}^{1/2} \rho^\varepsilon + \mathcal{N}^{1/2} \mathcal{D}^\lambda_{\mathbb{R}^n}).$$

Man wendet eine Homotopie auf die Wirkung der Algebra $C_0(\mathbb{R}^n)$ von rechts an, um auf Ebene der Kasparov-Moduln

$$\tau \otimes_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}} \kappa = 1_{C_0(\mathbb{R}^n)} \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}} = 1_{C_0(\mathbb{R}^n)}$$

zu erhalten.

□

Die kanonische Wirkung der Gruppe $G = O(n)$ liefert eine G-Modul-Struktur auf den Kasparov-Moduln, die die Elemente κ und τ definieren. Es ist daher $\tau \in KK^G(C_0(\mathbb{R}^n), \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})$ und $\kappa \in KK^G(\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}, C_0(\mathbb{R}^n))$.

4.5.5 Definition *Bezeichne P das Hauptfaserbündel der Orthonormalbasen des Kotangentialbündels der riemannschen Mannigfaltigkeit M. Das Element $\tau_M \in KK(C_0(T^*M), C(M, C^c(M)))$ ist definiert durch*

$$\tau_M := j_P(\tau).$$

Das Element $\kappa_M \in KK(C(M, \mathcal{C}^c(M)), C_0(T^*M))$ ist definiert durch

$$\kappa_M := j_P(\kappa).$$

Diese Elemente liefern den formalen Thom-Isomorphismus.

4.5.6 Satz *Die Elemente τ_M und κ_M sind invers zueinander. Es gilt*

$$\kappa_M \otimes_{C_0(T^*M)} \tau_M = 1_{C(M,\mathcal{C}^c(M))}$$

sowie

$$\tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M = 1_{C_0(T^*M)}.$$

Beweis:
Da $1_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} = j_P(1_{\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}})$ und $1_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} = j_P(1_{C_0(\mathbb{R}^n)})$ folgt der Satz aus den Sätzen 4.5.4 und 4.5.1.
□

Mit Hilfe dieses Satzes erhält man einen Isomorphismus der Gruppen $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ und $KK(\mathbb{C}, C(M, \mathcal{C}^c(M)))$, der gegeben ist durch die Zuordnung

$$KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M)) \ni a \mapsto a \otimes_{C_0(T^*M)} \tau_M \in KK(\mathbb{C}, C(M, \mathcal{C}^c(M))).$$

Dieser Isomorphismus bildet den formalen Thom-Isomorphismus in der K-Theorie. Eine entsprechende Abbildung in der K-Homologie lässt sich analog definieren. Nach dem letzten Satz ist die Zuordnung

$$a \mapsto a \otimes_{C_0(T^*M)} \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M$$

die Identität in $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$.

4.6 Poincaré-Dualität

In dem Artikel [K2] beschreibt der Autor eine Dualität der K-Theoriegruppen der Algebren $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ und $C(M)$, wobei M eine kompakte Mannigfaltigkeit bezeichnet. Unter dem im letzten Abschnitt beschriebenen Thom-Isomorphismus geht diese Dualität über in eine Dualität der Algebren $C_0(T^*M)$ und $C(M)$. In dieser Form wird sie in [C-S] verwendet. Dieser Dualität liegt die Existenz spezieller Elemente in den entsprechenden K-Theoriegruppen zugrunde. Zunächst sei das Element $[d_M] \in KK(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathbb{C})$ definiert.

4.6.1 Definition *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}}$ der Operator auf dem Bündel $L^2(M, \mathcal{C}^c(M))$ mit Symbol $i \cdot \rho_M^{i\varepsilon}$. Die Algebra $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ wirkt vermöge der Clifford-Multiplikation von links auf dem Hilbert-Raum $L^2(M, \mathcal{C}^c(M))$. Das Tupel $(L^2(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}})$ ist ein $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathbb{C})$-Kasparov-Modul. Die Klasse dieses Moduls in $KK(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathbb{C})$ wird mit $[d_M]$ bezeichnet.*

Kasparov definiert dieses Element in der folgenden Weise.

4.6.2 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $d + d^*$ der de Rham Operator auf dem Bündel $L^2(M, \Lambda^*(M))$. Sei $F := (d + d^*)(1 + \Delta)^{-1/2}$. Ist a eine 1-Form auf M und $l_+(a)\omega := \epsilon(a)\omega + \iota(\overline{a})\omega$, wobei ϵ die äußere Multiplikation mit a und ι die Kontraktion der Form ω mit dem zu a dualen Vektorfeld sei, so ist $l_+(a)^2 = |a|^2$ und daher lässt sich l_+ zu einer Wirkung der Clifford-Algebra als Endomorphismen von $\Lambda^*(M)$ ausdehnen nach Satz 3.1.2. Die Wirkung l_+ der Clifford-Algebra auf dem Hilbert-Raum $L^2(M, \Lambda^*(M))$ kommutiert im graduierten Sinne mit F und das Tupel $(L^2(M, \Lambda^*(M)), F)$ ist ein $(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathbb{C})$-Kasparov-Modul.[K2, Lemma 4.2]*

Nach dem folgenden Satz sind diese Definitionen äquivalent.

4.6.3 Satz *Der Modul* $(L^2(M,\mathcal{C}^c(M),\mathcal{D}_M^{\rho^{i\varepsilon}}))$ *ist homotop zu* $(L^2(M,\Lambda^*(M)),F)$.

Beweis: Sei $U:\Lambda^*\mathbb{R}^n \to \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ der Isomorphismus, der gegeben ist durch die Zuordnung $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\mapsto e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}$. Es sei $\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}(v) := U^*\rho^{i\varepsilon}(v)U$. Es werde nun für den Beweis dieses Satzes die Wirkung der Clifford-Algebra von links auf der äußeren Algebra explizit in der Notation des Kasparov-Moduls angegeben.

Dann sei $\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}}$ der Dirac Operator, der mit der oben beschriebenen Wirkung $\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}$ der Clifford-Algebra Wirkung von rechts auf $\Lambda^*(M)$ definiert wird. Dann ist $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_+,F)$ homotop zu $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_+,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$. Die Operatoren F und $\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}}$ antikommutieren, da Ihre Symbole antikommutieren. Daher ist eine Homotopie gegeben durch $(L^2(M,\Lambda^*(M))\otimes C([0,1]),t\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}}+\sqrt{1-t^2}F)$. Nun bezeichne

$$\mathrm{l}_-(v)\omega := \epsilon(v)\omega - \iota(v)\omega.$$

Diese Wirkung der Clifford-Algebra auf $\Lambda^*(M)$ erfüllt $\mathrm{l}_-(v)^2 = -|v|^2$. Ersetzt man die Algebrawirkung l_+ durch die Wirkung l_-, erhält man den Kasparov-Modul $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_-,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$. Dieser ist homotop zu $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_+,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$.
Um dies zu zeigen, sei zunächst $c_t:\mathcal{C}^c(M)\to\mathrm{End}(\Lambda^*(M))$ der Clifford-Algebrenhomomorphismus, der faserweise zu der Abbildung

$$T_xM \to \mathrm{End}(\Lambda^*T_M)$$

mit

$$v \mapsto i^t\epsilon(v)\omega + i^t\iota(v)\omega$$

gehört. Dann ist $(L^2(M,\Lambda^*(M))\otimes C([0,1]),c_t,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$ eine Homotopie zwischen $(L^2(M,\Lambda^*(M)),c_1,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$ und $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_+,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$. Da die beiden Algebrenwirkungen l_+ und l_- graduiert kommutieren, kommutiert c_1 graduiert mit l_-, und daher ist $tc_1+\sqrt{1-t^2}\mathrm{l}_-$ eine Clifford-Algebrenwirkung und liefert eine Homotopie $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_-,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})\sim(L^2(M,\Lambda^*(M)),c_1,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$. Wiederum unter dem Isomorphismus $U:\Lambda^*\mathbb{R}^n\to\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}$ erhält man die unitäre Äquivalenz der Moduln $(L^2(M,\mathcal{C}^c(M)),\mathcal{D}^{\rho^{i\varepsilon}})$ und $(L^2(M,\Lambda^*(M)),\mathrm{l}_-,\mathcal{D}^{\mathrm{r}_-^{i\varepsilon}})$. $\square$

Die Multiplikation von Schnitten des Clifford-Algebrenbündels mit Funktionen auf M liefert einen Algebrenhomomorphismus

$$\mu : C(M)\otimes C(M,\mathcal{C}^c(M)) \to C(M,\mathcal{C}^c(M)).$$

Man erhält in der KK-Theorie eine Abbildung $\mu^*: KK(C(M,\mathcal{C}^c(M)),\mathbb{C})\to KK(C(M)\otimes C(M,\mathcal{C}^c(M)),\mathbb{C})$. Das Element $\beta := \mu^*([d_M])$ hat nach dem folgenden Satz ein inverses Element α.

4.6.4 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Es existiert ein Element $\alpha \in KK(C(M, \mathcal{C}^c(M)) \otimes C_0(M))$, so dass mit $\beta = \mu^*([d_M])$ gilt*

$$\alpha \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \beta = 1_{C(M)}$$

sowie

$$\alpha \otimes_{C(M)} \beta = 1_{C(M,\mathcal{C}^c(M))}.$$

[K2, Theorem 4.10][3]

Zur Wirkung dieser Elemente gilt der nächste Satz.

4.6.5 Satz *Seien A, B und C separable C^*-Algebren. Gegeben seien Moduln $x := (E_1, T_1) \in KK(\mathbb{C}, A\hat{\otimes}B)$, $y := (E_2, T_2) \in KK(B, \mathbb{C})$ und $z := (E_3, T_3) \in KK(A\hat{\otimes}C, \mathbb{C})$. Dann gilt folgende Identität von Kasparov-Produkten;*

$$(x \otimes_B y) \otimes_A z = (x \otimes_A z) \otimes_B y.$$

Beweis: Diese Aussage erhält man mit Hilfe der folgenden Rechnung, die die Assoziativität des einfachen Produktes ausnutzt.

$$(x \otimes_B y) \otimes_A z = \tau_C((x \otimes_{A\hat{\otimes}B} \tau_A(y))) \otimes_{C\hat{\otimes}A} z = (\tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} \tau_C(\tau_A(y))) \otimes_{C\hat{\otimes}A} z =$$
$$= \tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} (\tau_C(\tau_A(y)) \otimes_{C\hat{\otimes}A} z) =$$
$$= \tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} (\tau_{C\hat{\otimes}A}(y) \otimes_{C\hat{\otimes}A} z) = \tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} (y \otimes_{\mathbb{C}} z) =$$
$$= \tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} (z \otimes_{\mathbb{C}} y) = \tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} (\tau_B(z) \otimes_B y) =$$
$$(\tau_C(x) \otimes_{C\hat{\otimes}A\hat{\otimes}B} \tau_B(z)) \otimes_B y) = (x \otimes_A z) \otimes_B y.$$

Die Umformungen der Abbildungen $\tau_{(\cdot)}$ erhält man unter Ausnutzung ihrer Realisierungen als Kasparov-Produkte und wiederum der Assoziativität. □

Man erhält mit den Elementen α und β sowie den Thom-Elementen κ_M und τ_M aus dem letzten Abschnitt die Dualitätsabbildungen wie Connes und Skandalis sie verwenden. Sei dazu

$$\theta := \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \beta \in KK(C(M) \otimes C_0(T^*M), \mathbb{C})$$

sowie

$$\zeta := \alpha \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M \in KK(\mathbb{C}, C(M) \otimes C_0(T^*M)).$$

Der Satz 4.6.4 liefert dann die folgende Aussage.

[3]Das Element α mit diesen Eigenschaften wird im Beweis des Theorems konstruiert

4.6.6 Satz *Für die Elemente ζ und θ gilt*

$$\zeta \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = 1_{C(M)}$$

sowie

$$\zeta \otimes_{C(M)} \theta = 1_{C_0(T^*M))}.$$

Es sei dann $\hat{\sigma}$ definiert durch die Zuordnung

$$\hat{\sigma} : KK(C_0(M), \mathbb{C}) \simeq KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M)); \quad \hat{\sigma} : a \mapsto \zeta \otimes_{C(M)} a.$$

Die Isomorphieeigenschaften dieser Abbildung ergeben sich unmittelbar aus den letzen beiden Sätzen. Danach ist

$$\hat{\sigma}(a) \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = (\zeta \otimes_{C_0(M)} a) \otimes_{C(T^*M)} \theta =$$
$$= (\zeta \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) \otimes_{C(M)} a = 1_{C(M)} \otimes_{C(M)} a = a.$$

Analog erhält man die Isomorphie

$$\overline{\partial} : KK(\mathbb{C}, C(M)) \simeq KK(C_0(T^*M), \mathbb{C}); \quad \overline{\partial} : a \mapsto a \otimes_{C(M)} \theta.$$

Die Bezeichnungen dieser Isomorphismen ergeben sich aus ihren jeweiligen Konkretisierungen, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden. An dieser Stelle soll zunächst ihre Verträglichkeit mit der Paarung in der K-Theorie, die durch das Kasparov-Produkt von Elementen aus $KK(\mathbb{C}, A)$ und $KK(A, \mathbb{C})$ gegeben ist, gezeigt werden.

4.6.7 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $a \in KK(\mathbb{C}, C(M))$ sowie $b \in KK(C(M), \mathbb{C})$. Dann gilt für die Paarung der Elemente a und b bzw. die Paarung ihrer Bilder $\overline{\partial}(a) \in KK(C_0(T^*M), \mathbb{C})$ und $\hat{\sigma}(b) \in KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ unter den Dualitätsisomorphismen die Identität*

$$< a, b >_K = < \hat{\sigma}(b), \overline{\partial}(a) >_K .$$

Beweis: Zunächst gilt

$$< a, b >_K = a \otimes_{C_0(M)} b = a \otimes_{C_0(M)} (\zeta \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) \otimes_{C_0(M)} b,$$

da $\zeta \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = 1_{C_0(M)}$. Mit Hilfe des letzten Satzes und der Assoziativität ergibt sich dann die Umformung

$$< a, b >_K = a \otimes_{C_0(M)} ((\zeta \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) \otimes_{C_0(M)} b) =$$

$$= a \otimes_{C_0(M)} ((\zeta \otimes_{C_0(M)} b) \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) = a \otimes_{C_0(M)} (\hat{\sigma}(b) \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) =$$
$$= \hat{\sigma}(b) \otimes_{C_0(T^*M)} (a \otimes_{C_0(M)} \theta) = \hat{\sigma}(b) \otimes_{C_0(T^*M)} \overline{\partial}(a) =< \hat{\sigma}(b), \overline{\partial}(a) >_K .$$

□

4.7 Konkretisierung der Dualitätsabbildungen

Zum Beweis der Sätze in diesem Abschnitt werden die folgenden Resultate benötigt.

4.7.1 Satz *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit gerader Dimension, ω_M das Volumenelement in der Algebra der Schnitte des Clifford-Algebrenbündels und $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein beliebiger $(\mathbb{C}, C(M, \mathcal{C}^c(M)))$-Modul. Dann ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ homotop zu einem Modul der Form $(\Gamma(\mathcal{E}) \oplus \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}), 0)$, wobei $\mathcal{E}$ und $\tilde{\mathcal{E}}$ Clifford-Moduln seien und der Graduierungsoperator auf dieser direkten Summe gegeben ist durch $\varepsilon(e \oplus \tilde{e}) := e \cdot \omega_M \oplus (-\tilde{e} \cdot \omega_M)$ für $e \oplus \tilde{e} \in \mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}$.*

Beweis: Bezeichne A die Algebra der Schnitte des Clifford-Algebrenbündels; $A := C(M, \mathcal{C}^c(M))$. Diese Algebra ist gerade graduiert. Dann ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ homotop zu dem Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \oplus (\hat{\mathbb{H}}_A, \hat{1})$, wobei wieder

$$\hat{1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei. Der Modul $(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \oplus (\hat{\mathbb{H}}_A, \hat{1})$ ist nach Satz 4.1.10 unitär äquivalent zu einem Modul $(\hat{\mathbb{H}}_A, \mathcal{T})$ für einen gewissen Operator $\mathcal{T}$. Nach dem Satz 4.1.11 ist $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{R}\mathcal{V}$ für ein invertierbares gerades $\mathcal{R}$ und eine ungerade selbstadjungierte partielle Isometrie $\mathcal{V}$. Mit der Homotopie $t \mapsto \mathcal{R}^t\mathcal{V}$ ergibt sich die Äquivalenz der Moduln $(\hat{\mathbb{H}}_A, \mathcal{T}) \sim (\hat{\mathbb{H}}_A, \mathcal{V})$. Mit der Bezeichnung $P := 1 - \mathcal{V}^2$ erhält man $(\hat{\mathbb{H}}_A, \mathcal{V}) \sim (P\hat{\mathbb{H}}_A, 0)$, da diese Moduln sich nur um einen degenerierten Modul unterscheiden. Da P eine gerade kompakte Projektion ist, ist $P\hat{\mathbb{H}}_A \simeq \Gamma(\mathcal{E}) \oplus \Gamma(\tilde{\mathcal{E}})$ für gewisse Clifford-Moduln $\mathcal{E}$ und $\tilde{\mathcal{E}}$, wobei $P\mathbb{H}_A \simeq \Gamma(\mathcal{E})$ und $P\mathbb{H}_A^{op} \simeq \Gamma(\tilde{\mathcal{E}})$. Nach dem Satz 4.1.12 ist der graduierte Modul $\hat{\mathbb{H}}_A$ isomorph zu dem Modul $\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_A$ mit dem Graduierungsoperator, der durch Multiplikation von rechts mit dem Element $\omega_M \oplus (-\omega_M)$ gegeben ist, und es folgt daher die Aussage. □

4.7.2 Satz *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit gerader Dimension, ω_M das Volumenelement in der Algebra der Schnitte des Clifford-Algebrenbündels. Weiter $(\Gamma(\mathcal{E})\oplus\Gamma(\tilde{\mathcal{E}}),0)$ ein Modul, der wie in der Formulierung des letzten Satzes graduiert sei. Sei $(C(M,\mathcal{C}^c(M)),\mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}})$ der Modul, der das Dirac-Element definiert. Dann ist das Kasparov-Produkt*

$$[(\Gamma(\mathcal{E})\oplus\Gamma(\tilde{\mathcal{E}}),0)]\otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))}[d_M]$$

gegeben durch einen beliebigen Dirac-Operator auf $\Gamma(\mathcal{E})\oplus\Gamma(\tilde{\mathcal{E}})$.

Beweis: Es genügt die Aussage für einen Modul $\Gamma(\mathcal{E})$, der durch das Element ω_M graduiert ist, zu beweisen. Bezeichne c die Clifford-Algebrenwirkung auf $\mathcal{E}$, so dass also $v \in T_x^*M$ als der Endomorphismus $e \mapsto ec(v)$ für $e \in \mathcal{E}$ wirkt. Man erält das Symbol $i\tilde{c} : T^*M \to \mathrm{End}(\pi^*(\mathcal{C}^c(M))); i\tilde{c}(v) := ic(v)(1+|v|^2)^{1/2}$. Mit der Bezeichnung „$\cdot$" für die Clifford-Multiplikation lässt sich analog zur Definition von ρ^ε das Symbol $\tilde{c}^\varepsilon$ definieren durch

$$\tilde{c}^\varepsilon(v)e := \varepsilon(e)\cdot v(1+|v|^2)^{-1/2} = e\cdot\omega_M\cdot v(1+|v|^2)^{-1/2},$$

für $e \in \mathcal{E}_x$ und $v \in T_xM$. Man erhält den Operator $\mathcal{D}^{i\tilde{c}^\varepsilon}$ mit Symbol $\tilde{c}^\varepsilon$, der für einen Schnitt $e \in \Gamma(\mathcal{E})$ in lokalen Koordinaten definiert ist durch

$$\mathcal{D}^{\tilde{c}^\varepsilon}e = i(1+\Delta)^{-1/2}\sum \nabla_{x_i}ec(\omega_M\cdot dx_i).$$

Es wird gezeigt, dass das Kasparov-Produkt der Moduln $(\mathcal{E},0)$ und $(C(M,\mathcal{C}^c(M)),\mathcal{D}^{\rho^\varepsilon})$ gegeben ist durch den Operator $\mathcal{D}^{\tilde{c}^\varepsilon}$. Da dieser von rechts wirkende Dirac-Operator mit einem beliebigen von links wirkenden Dirac-Operator $\mathcal{D}$ antikommutiert, ist er zu $\mathcal{D}$ homotop. Dies beweist dann die Aussage.

Zunächst ist das Tensorprodukt der Moduln gegeben durch den Raum der L^2-Schnitte von $\mathcal{E}$;

$$\mathcal{E}\hat{\otimes}_{C(M,\mathcal{C}^c(M))}L^2(M,\mathcal{C}^c(M)) \simeq L^2(M,\mathcal{E}).$$

Es ist nachzuprüfen, dass der Operator $\mathcal{D}^{i\tilde{c}^\varepsilon}$ ein $\mathcal{D}^{i\rho^\varepsilon}$-Zusammenhang ist. Sei dazu e ein homogener Schnitt vom Grad 0 von $\mathcal{E}$ und f ein Schnitt des Clifford-Algebrenbündels. Per Definition des Tensorproduktes ist $e\hat{\otimes}f = ec(f)$. Beachtet man, dass ω_M der Graduierungsoperator von $\mathcal{E}$ ist und in $C(M,\mathcal{C}^c(M))$ liegt, ergibt sich in lokalen Koordinaten

$$T_e\circ\mathcal{D}^{\rho^\varepsilon}f = e\cdot(1+\Delta)^{-1/2}c\left(i\sum\omega_M\cdot\nabla_{x_k}f\cdot\omega_M\cdot dx_k\right)\sim_{\mathcal{K}}$$

$$\sim_{\mathcal{K}} (1+\Delta)^{-1/2} ec\left(i \sum \nabla_{x_k} f \cdot \omega_M \cdot dx_k\right) =$$

$$= i(1+\Delta)^{-1/2} \sum \nabla_{x_k} \left(ec\left(f \cdot \omega_M \cdot dx_k\right)\right) + \underbrace{i(1+\Delta)^{-1/2} \left(\sum \nabla_{x_k} e\right) c\left(f \cdot \omega_M \cdot dx_k\right)}_{=:K(f)}.$$

Hierbei bezeichne ∇ sowohl den Clifford-Zusammenhang auf $\mathcal{E}$ als auch auf $C(M, \mathcal{C}^c(M))$. Man erhält also

$$T_e \circ \mathcal{D}^{\rho^\varepsilon} f = i(1+\Delta)^{-1/2} \sum \nabla_{x_i}(ec(f \cdot \omega_M \cdot dx_i)) + K(f).$$

Nun ist

$$\mathcal{D}^{\tilde{c}^\varepsilon} \circ T_e f = i(1+\Delta)^{-1/2} \sum \nabla_{x_i} ec(f)c(\omega_M \cdot dx_i) = i(1+\Delta)^{-1/2} \sum \nabla_{x_i} ec(f \cdot \omega_M \cdot dx_i).$$

Man erhält insgesamt

$$T_e \circ \mathcal{D}^{\rho^\varepsilon} - \mathcal{D}^{\tilde{c}^\varepsilon} \circ T_e = K \in \mathcal{K}(L^2(M, \mathcal{C}^c(M)), L^2(M, \mathcal{E})) \text{ für } \deg(e) = 0,$$

was für homogene $e \in \Gamma(\mathcal{E})$ vom Grad 0 die Zusammenhangseigenschaft von $\mathcal{D}^{\tilde{c}}$ ist. Ist e von Grad 1, so wirkt ω_M durch Multiplikation mit -1 auf e und dieselbe Rechnung ergibt

$$T_e \circ \mathcal{D}^{\rho^\varepsilon} + \mathcal{D}^{\tilde{c}^\varepsilon} \circ T_e = K \in \mathcal{K}(L^2(M, \mathcal{C}^c(M)), L^2(M, \mathcal{E})) \text{ für } \deg(e) = 1.$$

□

Mit Hilfe der nächsten beiden Sätze lässt sich das Bild des Elementes β unter dem Thom-Isomorphismus konkret angeben. Von Interesse ist dafür zunächst das Element $\tau_M \otimes [d_M]$.

4.7.3 Satz *Die Elemente $[d_M]$ und $[\overline{\partial}_{T^*M}]$ entsprechen einander unter dem Thom-Isomorphismus. Es gilt*

$$\tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [d_M] = [\overline{\partial}_{T^*M}] \in KK(C_0(T^*M), \mathbb{C})$$

Beweis: Der Modul dieses Produktes ist gegeben durch

$$(C(P) \otimes L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}))^G \hat{\otimes}_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} (L^2(P) \otimes \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})^G \simeq$$

$$(L^2(P) \otimes L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n}))^G.$$

Der Produktoperator ist dann gegeben durch das Tensorprodukt der Operatoren;

$$\mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}(\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})_M,$$

wobei $L^2(P)^G$ mit $L^2(M)$ identifiziert wird und $(\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})_M$ wie im Abschnitt 4.5 definiert ist. Dieser Operator ist homotop zu dem Dirac-Operator

$$\mathcal{D}^{\lambda_M}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}(\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})_M.$$

Eine Homotopie erhält man mit dem Operator $(t\mathcal{D}^{\lambda_M} + \sqrt{1-t^2}\mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}})\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}(\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})_M$, da die Operatoren $\mathcal{D}^{\lambda_M}$ und $\mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}}$ antikommutieren. Da nun wiederum $\mathcal{D}^{\lambda_M}\hat{\otimes}1$ und $1\hat{\otimes}(\mathcal{D}^{\lambda_{\mathbb{R}^n}})_M$ antikommutieren, definiert diese Summe einen Dirac-Operator auf dem Clifford-Modul über T^*M, der gegeben ist durch die Zurückholung des Clifford-Algebrenbündels über M; $\pi^*(\mathcal{C}^c(M))$. Nun ist $T^{0,1}(T^*M) \simeq T(T^*M)$ nach [W, Seite 32] und außerdem hat man die Isomorphie von $\mathcal{C}^c_V$-Clifford-Moduln $\Lambda^*V \simeq \mathcal{C}^c_V$ für einen Vektorraum V. Man erhält unter Ausnutzung von Satz 3.1.8 die Isomorphie

$$\pi^*(\mathcal{C}^c(M)) \simeq \mathcal{S}(T^*M)$$

als graduierte Clifford-Moduln. Da je zwei Dirac-Operatoren auf einem Clifford-Modul nach Satz 3.1.6 unitär äquivalent sind, ist der oben definierte Produktoperator homotop zum Dolbeault-Operator;

$$\mathcal{D}^{\lambda_M}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\mathcal{D}_M^{\lambda_{\mathbb{R}^n}} \sim (\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})(1+\Delta)^{-1/2}.$$

Die Operatoren definieren daher dasselbe Element in der K-Theorie. $\square$

4.7.4 Satz *Sei $\hat{\mu} : C(M) \otimes C_0(T^*M) \to \mathbb{C}_0(T^*M)$ die Multiplikationsabbildung. Dann gilt die folgende Identiät;*

$$\theta = \hat{\mu}^*[\overline{\partial}_{T^*M}] \in KK(C(M) \otimes C_0(T^*M), \mathbb{C}).$$

Beweis: Nach den Ausführungen auf Seite 54 ist $\hat{\mu}^*(a) = [\hat{\mu}] \otimes_{C_0(T^*M)} a$ für $a \in KK(C(M) \otimes \mathcal{C}^c(M), \mathbb{C})$. Per Definition ist dann

$$\theta = \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \beta = \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \mu^*[d_M] =$$

$$= \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [d_M] =$$

$$= \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M \otimes_{C_0(T^*M)} [\overline{\partial}_{T*M}],$$

wobei die letzte Identität aus dem vorangehenden Satz folgt. Es ist also zu zeigen, dass

$$[\hat{\mu}] = \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M,$$

um

$$\theta = [\hat{\mu}] \otimes_{C_0(T^*M)} [\overline{\partial}_{T*M}] = \hat{\mu}^*[\overline{\partial}_{T^*M}]$$

zu erhalten.

Das Produkt $\tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu]$ ist gegeben durch den Kasparov-Modul

$$\left((C(P) \otimes L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}^n})^G, \mathcal{D}_M^{\lambda^{\mathbb{R}^n}}\right) \in \mathcal{E}(C_0(T^*M) \otimes C(M), C(M, \mathcal{C}^c(M))).$$

Dieser Modul lässt sich auch als $(C_0(T^*M), C(M, \mathcal{C}^c(M)))$-Modul auffassen. In $KK(C_0(T^*M), C(M, \mathcal{C}^c(M)))$ definiert er das Element τ_M.

Nun ist $\tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M = 1_{C_0(T^*M)}$. Bezeichnet $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ein Kasparov-Produkt von τ_M und κ_M, so lässt sich dieser Modul sowohl als Element in $\mathcal{E}(C_0(T^*M), C_0(T^*M))$ als auch in $\mathcal{E}(C_0(T^*M) \otimes C(M), C_0(T^*M))$ auffassen, und es gilt $[(\mathcal{H}, \mathcal{F})] = 1_{C_0(T^*M)} \in KK(C_0(T^*M), C_0(T^*M))$ und $[(\mathcal{H}, \mathcal{F})] = \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M \in KK(C_0(T^*M) \otimes C(M), C_0(T^*M))$.

Nun ist $\tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M = 1_{C_0(T^*M)}$ und daher ist $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ homotop zu $(C_0(T^*M), 0)$ in $\mathcal{E}(C_0(T^*M), C_0(T^*M))$. Der Modul $(C_0(T^*M), 0)$ lässt sich auch als Element in $\mathcal{E}(C_0(T^*M) \otimes C(M), C_0(T^*M))$ auffassen und es ist $[(C_0(T^*M), 0)] = [\hat{\mu}] \in KK(C_0(T^*M) \otimes C(M), C_0(T^*M))$. Bezeichnet $(\mathcal{L}, \mathcal{G}) \in \mathcal{E}(C_0(T^*M), C_0(T^*M) \otimes C([0,1]))$ die Homotopie zwischen $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ und $(C_0(T^*M), 0)$ als $(C_0(T^*M), C_0(T^*M))$-Moduln, so definiert $(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ eine Homotopie dieser Moduln in $\mathcal{E}(C_0(T^*M) \otimes C(M), C_0(T^*M))$ und man erhält, dass

$$[\hat{\mu}] = [(C_0(T^*M), 0)] = \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [\mu] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa_M.$$

□

Mit Hilfe dieser beiden Sätze lässt sich der Dualitäts-Isomorphismus $KK(\mathbb{C}, C_0(M)) \to KK(C_0(T^*M), \mathbb{C})$ konkret beschreiben.

4.7.5 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $D := \overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M}$. Ist E ein Vektorbündel über M, so stimmt der Isomorphismus*

$$\overline{\partial}[E] \mapsto [E] \otimes_{C(M)} \theta$$

mit der Zuordnung

$$KK(\mathbb{C}, C_0(M)) \ni [E] \mapsto [D^{\pi^*(E)}] \in KK(C_0(T^*M), \mathbb{C})$$

überein.

Beweis: Zunächst gilt nach dem letzten Satz

$$\theta = \hat{\mu}^*[\overline{\partial}_{T^*M}] \in KK(C(M) \otimes C_0(T^*M), \mathbb{C}).$$

Dann ist

$$[E] \otimes_{C(M)} \theta = [E] \otimes_{C(M)} \hat{\mu}^*[\overline{\partial}_{T^*M}] = \hat{\mu}_*[E] \otimes_{C(M)} [\overline{\partial}_{T^*M}].$$

Nun ist $\hat{\mu}_*[E] \in KK(C_0(T^*M), C_0(T^*M))$ gegeben durch den Modul $(\Gamma(\pi^*(E)), 0)$, wobei $\pi : T^*M \to M$ wieder die Bündelprojektion bezeichne. Es wurde schon gezeigt, dass $D^{\pi^*(E)}(1 + \Delta)^{-1/2}$ ein $D(1 + \Delta)^{-1/2}$-Zusammenhang auf $L^2(T^*M, \mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}E)$ ist. Da $\big(L^2(T^*M, \mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}E), D^{\pi^*(E)}\big)$ außerdem ein $(C_0(T^*M), \mathbb{C})$-Kasparov-Modul ist, folgt die Behauptung, da die zweite Eigenschaft des Kasparov-Produktes trivialerweise erfüllt ist. □

4.7.6 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Jedes Element in der Gruppe $KK(C_0(M), \mathbb{C})$ ist gegeben durch ein Element der Form $[P]$ für einen geeigneten Pseudodifferentialoperator P. Der Isomorphismus*

$$\hat{\sigma} : KK(C_0(M), \mathbb{C}) \to KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$$

ist gegeben durch die Zuordnung

$$\hat{\sigma} : [P] \mapsto (-1)^{dim M}[\sigma(P)] \in KK(\mathbb{C}, T^*M),$$

wobei $\sigma(P)$ das Symbol von P aufgefasst als Funktion auf T^*M sei.

Beweis:

1. Sei zunächst die Dimension von M gerade. Es wird gezeigt, dass die Umkehrung der Abbildung σ gegeben ist durch die die Zuordnung $\Psi : KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M)) \to KK(C(M), \mathbb{C})$, die einem Symbol den entsprechenden PDO zuweist. Dies ist nach [C-S, Proposition 1.4] eine wohldefinierte Abbildung auf der Ebene der K-Theorie.

Ist ein Symbol a gegeben, so liefert das Kasparov-Produkt $a \otimes_{C_0(T^*M)} \tau$ einen $(\mathbb{C}, C(M, \mathcal{C}^c(M)))$-Kasparov-Modul. Nach dem Satz 4.7.1 lässt sich jeder Kasparov-Modul über $C(M, \mathcal{C}^c(M))$ repräsentieren durch einen Modul der Form $(\Gamma(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}), 0)$, wobei $\mathcal{E}$ und $\tilde{\mathcal{E}}$ Clifford-Moduln im Sinne der Definition 3.1.7 sind und der Graduierungsoperator auf $\Gamma(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}})$ durch das Element $\omega_M \oplus (-\omega_M)$ gegeben ist. Das Kasparov-Produkt mit κ_M liefert dann das Symbol eines Dirac-Operators auf $\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}$, welches das gleiche Element in $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ definiert wie a, da $\tau \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \kappa = 1_{C_0(T^*M)}$. Somit lässt sich $\Psi(a)$ repräsentieren durch einen Dirac-Operator auf $\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}$. Nun wird gezeigt, dass auch

$$a \otimes_{C_0(T^*M)} \theta$$

durch einen Dirac-Operator auf $\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}$ gegeben ist. Da zwei Dirac-Operatoren auf einem Clifford-Modul unitär äquivalent sind, ist dann $a \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = \Psi(a)$. Zunächst gilt

$$a \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = a \otimes_{C_0(T^*M)} \tau_M \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \beta = [(\Gamma(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}), 0)] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \mu^*[d_M].$$

Dann ist per Definition von μ^* und wegen der Assoziativität des Kasparov-Produktes

$$[(\Gamma(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}), 0)] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} \mu^*[d_M] = \mu_*[(\Gamma(\mathcal{E}), 0)] \otimes_{C(M,\mathcal{C}^c(M))} [d_M].$$

Es ist $\mu_*[(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}}, 0)]$ gegeben durch den $(C(M), \mathcal{C}^c(M))$-Modul, der aus $\mathcal{E}$ entsteht, wenn man $\Gamma(\mathcal{E} \oplus \tilde{\mathcal{E}})$ als rechts-Modul über der Cliffordalgebra und als links-Modul über $C(M)$ auffasst. Das Element $[d_M]$ war definiert durch

$$[d_M] = [(C(M, \mathcal{C}^c(M)), \mathcal{D}^{\rho_M^{i\varepsilon}})].$$

Somit gilt nach dem Satz 4.7.2

$$a \otimes_{C_0(T^*M)} \theta = \Psi(a),$$

da je zwei Dirac-Operatoren auf demselben Clifford-Modul das gleiche Element in der K-Homologie definieren. Da aber $\zeta \otimes_{C(M)} \theta = 1_{C_0(T^*M)}$ gilt dann

$$\zeta \otimes_{C(M)} \Psi(a) = \zeta \otimes_{C(M)} (a \otimes_{C_0(T^*M)} \theta) =$$

$$a \otimes_{C_0(T^*M)} \zeta \otimes_{C(M)} \theta = a \otimes_{C_0(T^*M)} 1_{C_0(T^*M)} = a.$$

Somit folgt die Aussage für orientierbare Mannigfaltigkeiten gerader Dimension. Ist M nicht orientierbar, so existiert nach [D-K, Satz 5.5] eine orientierbare zweifache Überlagerung $\tilde{M}$ von M. Ein beliebiger PDO auf M lässt sich zu einem $\mathbb{Z}_2$-invarianten Operator über $\tilde{M}$ liften. Der geliftete Operator ist dann bis auf einen glättenden Operator eindeutig. Man erhält eine Abbildung $KK(C(M), \mathbb{C}) \to KK^{\mathbb{Z}_2}(C(\tilde{M}), \mathbb{C})$. Zur besseren Übersichtlichkeit sei die Mannigfaltigkeit als Subscript in der Dualitätsabbildung angegeben. Die Abbildung $\hat{\sigma}_{\tilde{M}}$ ist verträglich mit der Gruppenwirkung und lässt sich daher einschränken auf die Untergruppe $KK^{\mathbb{Z}_2}(C(\tilde{M}), \mathbb{C}) \subset KK(C(\tilde{M}), \mathbb{C})$ und man erhält eine Abbildung $\hat{\sigma}^{\mathbb{Z}_2}_{\tilde{M}}$: $KK^{\mathbb{Z}_2}(C(\tilde{M}), \mathbb{C}) \to KK^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{C}, C(T^*\tilde{M}))$. Bezeichnet λ die Liftungsabbildung und d den kanonischen Isomorphismus $d : KK^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{C}, C(T^*\tilde{M})) \to KK(\mathbb{C}, C(T^*M))$, so erhält man

$$\hat{\sigma}_M = d \circ \hat{\sigma}^{\mathbb{Z}_2}_{\tilde{M}} \circ \lambda.$$

Daher ist $\hat{\sigma}$ auch im nichtorientierbaren Fall durch das Symbol gegeben.

2. Sei die Dimension von M ungerade. Für den Rest dieses Beweises bezeichne S^1 die 1-Sphäre. Sei N eine beliebige kompakte Mannigfaltigkeit ungerader Dimension und $b \in KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ ein beliebiges Symbol. Man kann dann das Symbol $a \otimes b$ in $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M \times T^*N))$ bilden und erhält mit dem im ersten Teil bewiesenen $\hat{\sigma}\left(\Psi(a \otimes b)\right) = \sigma\left(\Psi(a \otimes b)\right) = \sigma(\Psi(a)) \otimes \sigma(\Psi(b))) = a \otimes b$. Da die Dualitätsabbildung $\hat{\sigma}$ ebenfalls auf die Faktoren aufspaltet gilt $\hat{\sigma}(\Psi(a)) \otimes \hat{\sigma}(\Psi(b))) = a \otimes b$. Aus dieser Identität folgt zunächst, das die Abbildung $a \mapsto \hat{\sigma}(\Psi(a)))$ ein Isomorphismus des Moduls $KK(\mathbb{C}, C_0(T^*M))$ ist. Es ist zu zeigen, dass er tatsächlich die Identität ist.

   Sei $\mathcal{B}_2$ der Bott-Generator aus $K^0(\mathbb{R}^n)$ wie in [H-R, Definition 4.3.10] angegeben[4]. Der Dolbeault-Operator $\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}$ auf $\mathbb{R}^2$ aufgefasst als komplexe Mannigfaltigkeit definiert ein Element $[\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] \in KK(C_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$. Higson und Roe als bezeichnen dieses Element als fundamentale Homologieklasse [H-R, Definition 11.3.3 und Beispiel 11.3.5] und geben ihm das Symbol $[\mathbb{R}^2]$. Nach [H-R, Satz 11.4.5] ist dann $\mathcal{B}_2 \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] = 1$. Sei nun $i : C_0(\mathbb{R}^2) \to C_0(T^*S^1)$ und $j : C_0(T^*S^1) \to BC(\mathbb{R}^2)$, wobei BC die beschränkten stetigen Funktionen bezeichne. Man kann dann $C_0(T^*S^1)$ als

[4]Das Element dort ist auf der offenen Einheitskreisscheibe definiert. Man erhält das Element auf $\mathbb{R}^2$ durch die Inklusion der Kreisscheibe in den Raum.

Unteralgebra von $BC(\mathbb{R}^2)$ auffassen und es gilt dann $C_0(\mathbb{R}^2) \subset C_0(T^*S^1)$. Die Abbildung i lässt sich dann ausdehnen auf $C_0(T^*S^1)$. Man erhält $j \circ i = \mathrm{id}_{C_0(T^*S^1)}$ sowie $i \circ j = \mathrm{id}_{C_0(\mathbb{R}^2)}$. Dann ist $i_*(\mathcal{B}_2)$ das Symbol eines elliptischen PDO A. Atiyah und Singer zeigen, dass dieser PDO auf S^1 den Index -1 hat; $\mathrm{index} A = -1$. ([A-S1, Seiten 525-526]). Auf der anderen Seite ist

$$\sigma(A) \otimes_{C_0(T^*S^1)} [\overline{\partial}_{T^*S^1}] = i_*(\mathcal{B}_2) \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} j^*[\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] =$$

$$= \mathcal{B}_2 \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [i] \otimes_{C_0(T^*S^1)} [j] \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] =$$

$$\mathcal{B}_2 \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [i \circ j] \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] = \mathcal{B}_2 \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} [\overline{\partial}_{\mathbb{R}^2}] = 1.$$

Da das äußere Produkt eines Kasparov-Moduls mit $1_{\mathbb{C}}$ den Modul selbst liefert, folgt ist dann

$$\hat{\sigma}(\Psi(a)) = \hat{\sigma}(\Psi(a)) \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}} = \hat{\sigma}(\Psi(a)) \otimes_{\mathbb{C}} \sigma(A) \otimes_{C_0(T^*S^1)} [\overline{\partial}_{T^*S^1}].$$

Die Verträglichkeit der Dualitätsabbildungen mit der Paarung $<,>$ liefert $\hat{\sigma}(A) \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\partial}_{T^*S^1} =< 1_{S^1}, A >= -1 = -\sigma(A) \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\partial}_{T^*S^1}$. Man erhält mit der Darstellung von $\hat{\sigma}$ in gerader Dimension

$$\hat{\sigma}(\Psi(a)) = -\hat{\sigma}(\Psi(a)) \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\sigma}(A) \otimes_{C_0(T^*S^1)} [\overline{\partial}_{T^*S^1}] =$$

$$-\hat{\sigma}(\Psi(a) \otimes_{\mathbb{C}} A) \otimes_{C_0(T^*S^1)} [\overline{\partial}_{T^*S^1}] = -a \otimes_{\mathbb{C}} \sigma(A) \otimes_{C_0(T^*S^1)} [\overline{\partial}_{T^*S^1}] = -a.$$

Es ist daher $\hat{\sigma}(P) = -[\sigma(P)]$ für ungerade Dimension.

□

Bemerkung: Dieses Resultat stimmt nicht mit dem Ergebnis von Connes und Skandalis überein. In [C-S, Satz 3.10] behaupten die Autoren, die Dualitätsabbildung, die in dieser Arbeit mit $\hat{\sigma}$ bezeichnet wird, sei durch die Symbolabbildung gegeben, also

$$\hat{\sigma}[P] = [\sigma(P)].$$

Die dort angegebene Beweisskizze wurde hier im Detail ausgeführt. So, wie sie die Autoren dort beschreiben, lässt sie sich aber nur im Falle gerader Dimension der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit umsetzten. Der Beweis des letzten Satzes zeigt, dass im Falle ungerader Dimension ein Vorzeichen hinzugefügt werden muss.

Bezeichnet $\mathbf{1}_M$ das triviale komplexe Linienbündel über M, so erhält man mit den Ergebnissen aus diesem Abschnitt die folgende Aussage.

4.7.7 Satz *Sei $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator über einer kompakten Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gilt*

$$\mathrm{index}(P) = < \boldsymbol{1}_M, [P] > = (-1)^{dim M} < \sigma(P), [\overline{\partial}_{T^*M}] > .$$

Kapitel 5

Der Kern des Produktoperators

5.1 Eine verallgemeinerte McKean-Singer Formel

Das zentrale Resultat aller Beweise der Indexformel, die sich auf die Wärmeleitungsgleichung stützen, ist die McKean-Singer Formel, die den Zusammenhang zwischen dem Index eines elliptischen Operators auf einer kompakten Mannigfaltigkeit und einer aus diesem Operator konstruierten Operatorhalbgruppe herstellt. Ziel dieses Abschnittes ist es, eine analoge Formel für den Index des Operators aus dem Kasparov-Produkt $\sigma(P) \otimes_{C_0(T^*M)} [\overline{\partial}_{T^*M}]$ herzuleiten, und das Integral über den Wärmeleitungskern mit einem Integral charakteristischer Klassen zu identifizieren.

Im Falle eines Dirac-Operators lautet die McKean-Singer-Formel wie folgt.

5.1.1 Satz (McKean-Singer) *Sei D ein Dirac-Operator über der kompakten Mannigfaltigkeit M der Dimension $2n$. Sei $D : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ der Dirac-Operator eines graduierten Dirac-Bündels $\mathcal{E}$ über M. Bezüglich der direkten Summe $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ lässt sich D in der Form*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Die von dem Operator D^2 generierte Halbgruppe e^{-tD^2} sei durch den Operatorkern $k_t(x,y)$ gegeben. Für den Index des Operators D_+ gilt die Formel

$$index(D_+) = str(e^{-tD^2}) = \int_M str(k_t(x,x))dx.$$

[B-G-V, Satz 3.50]

In [B-G-V] wird für den Wärmeleitungskern k_t eines Dirac-Operators D auf einem Clifford-Modul $\mathcal{E}$ über einer kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit gerader Dimension M eine Darstellung in charakteristischen Klassen bewiesen. Da der Kern des Dirac-Operators ein Schnitt im Endomorphismenbündel des Clifford-Moduls ist, erlaubt die Symbolabbildung für die Clifford-Algebra die Identifikation dieses Schnittes mit einer Differentialform auf M.

Es gilt der Satz.

5.1.2 Satz *Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Sei $D : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ der Dirac-Operator eines graduierten Dirac-Bündels $\mathcal{E}$ über M mit Wärmeleitungskern $k_t(\cdot,\cdot)$. Fasst man den Kern vermöge der Symbolabbildung für die Clifford-Algebra als Differentialform auf, so gilt*

$$k_1(\cdot,\cdot)\mid_{x=y}= (2\pi i)^{-n}\hat{\mathcal{A}}(TM)ch(\mathcal{E}/\mathcal{S}).$$

[B-G-V, Satz 4.1]

Sei nun D ein beliebiger Dirac-Operator auf einer nicht notwendigerweise kompakten Mannigfaltigkeit M. Es gilt dann immer noch die Aussage des letzen Satzes.

5.1.3 Satz *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, $D : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ ein Dirac-Operator und $k_t(\cdot,\cdot)$ sein Wärmeleitungskern. Es gilt*

$$k_1(\cdot,\cdot)\mid_{x=y}= (2\pi i)^{-n}\hat{\mathcal{A}}(TM)ch(\mathcal{E}/\mathcal{S})$$

Beweis: Da der Operator D ein Differentialoperator ist, ist er lokal und er lässt den Raum der Schnitte, deren Träger in einer offenen Menge U liegen, invariant. Daher ist der Wärmeleitungskern des auf U eingeschränkten Operators gegeben durch die Einschränkung von $k_t(\cdot,\cdot)$ auf $U \times U$. Ist nun U eine bezüglich der Metrik beschränkte Menge, so kann man eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit N mit Dirac-Bündel $\mathcal{E}^N$ und Dirac-Operator D^N und einen isometrischen Bündelmorphismus $\phi : \mathcal{E}\mid_U\to \mathcal{E}^N\mid_{\phi(U)}$ finden, so dass $\phi_*(D)$ auf $\phi(U)$ mit D_N übereinstimmt. Dann stimmen dort auch die Wärmeleitungskerne der Operatoren überein und $k_t(\cdot,\cdot)$ ist auf $U \times U$ gegeben durch die Zurückholung des Kerns von D_N. Da ϕ eine Isometrie ist, ist $\phi^*(\hat{A}(N)\mathrm{ch}(\mathcal{E}^N/\mathcal{S})\mid_{\phi(U)}) = \hat{A}(M)\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S})$ und man erhält die Aussage mit

Hilfe des letzten Satzes. □

Mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich, das Kasparov-Produkt $< \sigma(P), [\overline{\partial}_{T^*M}] > \in \mathbb{Z}$ als Integral einer Differentialform mit kompaktem Träger über das Tangentialbündel darzustellen. Dieses Integral ist genau das Indexintegral aus der allgemeinen Indexformel. Dazu seien zunächst spezielle Repräsentanten der involvierten KK-Elemente betrachtet.

Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4. lässt sich die Symbolklasse $\sigma(P)$ eines Pseudodifferentialoperators darstellen in der Form

$$\sigma(P) = [(\Gamma(E) \oplus \Gamma(F), T)],$$

wobei E und F Vektorbündel mit kompaktem Träger sind, die außerhalb einer kompakten Menge identisch und trivial sind. Der Operator T kann so gewählt werden, dass $T = 0$, auf einer Umgebung des Trägers der Vektorbündel. Außerhalb einer kompakten Menge ist T die identische Abbildung zwischen den dort identischen Vektorbündeln.

Das Element $[\overline{\partial}_{T^*M}]$ wird mit dem Dolbeault-Operator auf dem Kotangentialbündel konstruiert. Sei $D := (\overline{\partial}_{T^*M} + \overline{\partial}^*_{T^*M})(1+\Delta)^{-1/2}$. Dann ist

$$[\overline{\partial}_{T^*M}] = \left[\left(L^2(\mathcal{S}(T^*M)), D\right)\right].$$

Setzt man $V := \mathcal{S}(T^*M)^+$ und $W := \mathcal{S}(T^*M)^-$, so liefert der Satz 4.4.10, dass das der Operator

$$\mathcal{M}^{1/2} T \hat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathcal{S}(T^*M))} + \mathcal{N}^{1/2} D^{E \oplus F}$$

auf dem Bündel $\mathcal{S}(T^*M) \hat{\otimes} (E \oplus F)$ das Kasparov-Produkt der Elemente $\sigma(P)$ und $[\overline{\partial}_{T^*M}]$ repräsentiert.

Der Operator $\mathcal{M}$ ist gegeben durch einen glatten Operatorkern. Ist ϕ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, so ist $\phi\mathcal{M}$ der Kern eines kompakten Operators. Sei nun ϕ eine Abschneidefunktion für den Träger des Vektorbündels $E \oplus F$ und $\tilde{\mathcal{M}} := (1-\phi)\mathcal{M}$ sowie $\tilde{\mathcal{N}} = 1 - \tilde{\mathcal{M}}$. Sei nun

$$(*) \qquad \mathcal{D} := \tilde{\mathcal{M}}^{1/4} T \hat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathcal{S}(T^*M))} \tilde{\mathcal{M}}^{1/4} + \tilde{\mathcal{N}}^{1/4} D^{E \oplus F} \tilde{\mathcal{N}}^{1/4}.$$

Der Operator $\mathcal{D}$ ist ein ungerader Operator und lässt sich daher in der Form

$$(**) \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_- \\ \mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathcal{D} \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^{1/2} T \hat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathcal{S}(T^*M))} + \mathcal{N}^{1/2} D^{E \oplus F}.$$

Daher repräsentiert der Modul

$$\big(L^2(\mathcal{S}(T^*M) \hat{\otimes} (E \oplus F)), \mathcal{D}\big)$$

das Kasparovprodukt $\sigma(P) \otimes_{C_0(T^*M)} [\overline{\partial}_{T^*M}]$. Die wesentlichen Eigenschaften dieses Operators sind seine Selbstadjungiertheit sowie die Tatsache, dass er auf dem Träger des Bündels $E \oplus F$ mit dem getwisteten Dolbeault-Operator übereinstimmt.

Mit Hilfe der Selbstadjungiertheit wird im nächsten Satz nachgewiesen, dass $\mathcal{D}^2(1 + \Delta)$ eine Halbgruppe von Operatoren mit glatten Kernen definiert.

5.1.4 Satz *Sei E ein hermitesches Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und $F : L^2(E) \to L^2(E)$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbert-Raum der L^2-Schnitte dieses Bündels. Konstruiert man mit dem Laplace-Operator Δ der Mannigfaltigkeit den unbeschränkten Operator $\mathcal{F} := F(1 + \Delta)^{1/2}$, so generiert dieser Operator eine Halbgruppe von Operatoren, die durch glatte Operatorkerne gegeben sind.*

Beweis: Es wird gezeigt, dass $\mathcal{F}$ eine analytische Halbgruppe $T(t)$ generiert. Nach [P, Th. 4.2] ist dann für $t > 0$ $T(t)u \in \mathrm{dom}(\mathcal{F}^n)$, wobei $\mathrm{dom}(\mathcal{F}^n)$ den Definitionsbereich der n-ten Potenz von $\mathcal{F}$ bezeichne. Da $\mathrm{dom}(\mathcal{F}^n)$ der Sobolev-Raum $H^n(E)$ ist, und $\bigcap_n H^n(E) \subset C^\infty(M)$, besteht die Halbgruppe aus glättenden Operatoren und es folgt die Behauptung.

Zunächst wird gezeigt, dass $\mathcal{A} := \mathcal{F} + c$ für ein $c > 0$, mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{spec}(\mathcal{A}) > 0$ ist, eine analytische Halbgruppe $\hat{T}(t)$ generiert. Dann ist die von $\mathcal{F}$ generierte Halbgruppe $T(t)$ gegeben durch $T(t) = e^{-ct}\hat{T}(t)$ und daher ebenfalls analytisch. Nach [P,Th. 5.2] genügt es zu zeigen, dass ein ein $M > 0$ und ein δ mit $0 < \delta < \pi/2$ existieren mit der Eigenschaft, dass $\| (-\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \| \leq M/|\lambda|$ für

$$\lambda \in \Sigma := \{\lambda | |\arg(\lambda)| < \pi/2 + \delta\}.$$

Sei zunächst der Realteil von λ positiv, d.h. $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, und $f := (-\mathcal{A} - \lambda)u$ mit $u \in H^1(E)$. Dann ist $-(\mathcal{A}u, v)_{L^2(E)} - \lambda(u, v) = -(f, v)_{L^2(E)}$ für alle $v \in L^2(E)$. Setzt man $v := u$, so ergibt sich

$$|\lambda||u|^2_{L^2(E)} \leq \left|(\mathcal{A}u, u)_{L^2(E)}\right| + |f|_{L^2}|u|_{L^2} = (\mathcal{A}u, u)_{L^2(E)} + |f|_{L^2}|u|_{L^2}.$$

Nun gilt

$$(\mathcal{A}u, u)_{L^2} = \mathrm{Re}(\mathcal{A}u, u)_{L^2} = \mathrm{Re}(-\lambda(u, u)_{L^2}) + \mathrm{Re}(f, u)_{L^2} \leq |f|_{L^2}|u|_{L^2}.$$

Insgesamt erhält man, dass

$$|\lambda||u|_{L^2} \leq 2|f|_{L^2}|u|_{L^2},$$

so dass wegen $f = -(\mathcal{A} + \lambda)u$ gilt

$$|u|_{L^2} \leq 2/|\lambda||(\mathcal{A} + \lambda)u|_{L^2}$$

und somit $|(\mathcal{A}+\lambda)^{-1}| \leq 2/\lambda$ für alle λ mit $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ und die Bedingung ist mit $M = 2$ erfüllt.

Sei nun $\lambda \neq 0$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ und $\mu := \lambda(1 + \sigma i)$. Zunächst gilt allgemein

$$R_\mu - R_\lambda = -(\lambda - \mu)R_\lambda R\mu,$$

wobei R_α die Resolvente $-(\mathcal{A} + \alpha)^{-1}$ bezeichne. Dann gilt für σ mit $|\lambda - \mu||R_\lambda| < 1$

$$R_\mu = (1 - (\mu - \lambda)R_\lambda)^{-1}R_\lambda = R_\lambda \sum_0^\infty (\mu - \lambda)^n R_\lambda^n.$$

Es ist daher

$$|R_\mu| \leq |R_\lambda|/(1 - |\mu - \lambda||R_\lambda|) \leq \frac{2|\lambda|^{-1}}{1 - 2|\sigma||\lambda|^{-1}} = \frac{2(1 + \sigma^2)^{1/2}}{1 - 2\sigma} 1/|\mu|,$$

wobei die mittlere Abschätzung für genügend kleine σ gilt. Es ist in diesem Fall die Bedingung also mit $M := (2(1 + \sigma^2)^{1/2})/(1 - 2\sigma)$ erfüllt. □

Da die Konstruktion der Halbgruppe aus einem Generator eine lokale Operation ist, lässt sich die Halbgruppe des Dolbeault-Operators, die sich mit Hilfe des Satzes 5.1.3 konkret angeben lässt, zur Berechnung des Index von $\mathcal{D}$ heranziehen.

5.1.5 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Der Kern der Operatorhalbgruppe $\exp(-t(D^{E\oplus F})^2(1 + \Delta))$ sei gegeben durch $k_t(x, y)$. Es sei $\mathcal{D}$ der durch $(*)$ definierte Operator, der das Produkt*

$$\sigma(P) \otimes_{C_0(T^*M)} [\overline{\partial}_{T^*M}]$$

definiert und $\mathcal{D}_+$ der Operator aus $(**)$. *Dann gilt*

$$\textit{index}\,(\mathcal{D}_+) = \int\limits_{T^*M} \textit{str}(k_t(x,x))dx$$

für jedes $t > 0$.

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, dass das Integral existiert. Nach Satz 5.1.3 lässt sich der Integrand schreiben als

$$\mathrm{str}(k_t(x,x)) = (4\pi t)^{-n}\mathrm{str}\left(\det{}^{1/2}\left(\frac{t\Omega_{T^*M}/2}{\sinh(t\Omega_{T^*M}/2)}\right)\exp(-t\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}})\right).$$

Das Argument der graduierten Spur auf der rechten Seite ist ein Polynom vom Grad n in t. Es lässt sich schreiben in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_k t^k.$$

Hierbei ist a_k eine Differentialform vom Grad $2k$. Die graduierte Spur von a_k ist nach Satz Satz 3.3.6 0 für alle $k < n$. Somit ist

$$\mathrm{str}(k_t(x,x)) = (4\pi t)^n \mathrm{str}(a_k t^n) = (4\pi)^{-n}\mathrm{str}(a_k).$$

Es ist daher die Funktion auf der rechten Seite von t unabhängig und somit auch das Integral. Trivialerweise ist also auch der Träger des Integranden unabhängig von t. Er ist außerdem kompakt: Der Krümmungstensor Ω_{T^*M} von T^*M lässt sich lokal als matrixwertige 2-Form schreiben. Da T^*M längs der Kotangentialräume in der natürlichen von M induzierten Metrik nicht gekrümmt ist, erhält man mit den lokalen Koordinaten $\{x_i, \xi_i\}_{i=1\ldots n}$[1] mit matrixwertigen Funktionen Ω_{kl} eine Darstellung

$$\Omega_{T^*M} = \sum \Omega_{kl} dx_k \wedge dx_l.$$

Da die relative Krümmung $\Omega^{\mathcal{S}(T^*M)/\mathcal{S}}$ identisch 0 ist, ist die relative Krümmung des Moduls $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} = \Omega^{E\oplus F}.$$

[1]Dies seien die früher schon verwendeten Bündelkoordinaten

Bezeichnet $d : C^\infty(T^*M)^n \to C^\infty(T^*M)^n$ die n-fache direkte Summe des kanonischen flachen Zusammenhangs und ist $W \subset T^*M \times \mathbb{C}^n$ ein eingebettetes Vektorbündel mit entsprechender Projektion p^W, so definiert der Operator $p^W d : \Gamma^\infty(W) \hookrightarrow C^\infty(T^*M)^n \to C^\infty(T^*M)^n \to \Gamma^\infty(W)$ einen kanonischen Zusammenhang auf W. Dessen Krümmung ist nach [G-V-F, Seite 340] gegeben durch $p^W dp^W dp^W$.

Man erhält analog Zusammenhänge $p^E d$ und $p^F d$ mit den Krümmungsformen Ω^E und Ω^F. Diese haben kompakten Träger, da die Projektionen außerhalb einer kompakten Menge durch konstante Funktionen gegeben sind.

Es hat dann der Volumenanteil der Form

$$\left(\det{}^{1/2}\left(\frac{t\Omega_{T^*M}/2}{\sinh(t\Omega_{T^*M}/2)}\right)\exp(-t\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}})\right)$$

kompakten Träger, da die Form, die die relative Chern-Klasse definiert, außerhalb einer kompakten Menge identisch 0 ist. Bezeichnet T wieder das Berezin-Integral so erhält man, dass die Funktion

$$\operatorname{str}(k_t(x,x)) = (4\pi t)^{-n} T\left(\det{}^{1/2}\left(\frac{t\Omega_{T^*M}/2}{\sinh(t\Omega_{T^*M}/2)}\right)\exp(-t\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}})\right)$$

ebenfalls kompakten Träger hat, und es existiert das Integral wie behauptet.

Für einen durch einen stetigen Kern $T(x,y)$ definierten Operator $\mathcal{T}$ und ein Kompaktum $K \subset T^*M$ kann man

$$\operatorname{str}_K(\mathcal{T}) := \int_K \operatorname{str}(T(x,x))dx$$

definieren. Ist $\mathcal{T}$ ein Spurklasse Operator, so gilt

$$\lim_K \operatorname{str}_K(\mathcal{T}) = \operatorname{str}(\mathcal{T}).$$

Der Grenzwert ist hier als Grenzwert über die gerichtete Menge aller Kompakta in T^*M zu verstehen. Nun kann man aus dem Operator $\mathcal{D}$ einen unbeschränkten Fredholmoperator $\mathsf{D} := \mathcal{D}(1+\Delta)^{1/2}$ konstruieren. Die Kerne der Operatoren D und $\mathcal{D}$ sind als graduierte Vektorräume isomorph. Sei P_0 die Projektion auf den Kern von D und $P_1 := 1 - P_0$ die Projektion auf das orthogonale Komplement des Kerns. Die Halbgruppe $e^{-t\mathsf{D}^2}$ ist gegeben durch stetige Kerne mit Werten in $\operatorname{End}(\mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F))$ und werde mit $k_t^{\mathsf{D}}(x,y)$ bezeichnet. Fasst man die Funktionen $x \mapsto k_t^{\mathsf{D}}(x,x)$ als Schnitte in $\Lambda^* T^*(T^*M) \hat{\otimes} \operatorname{End}(E \oplus F)$ auf, so hat die Komponente der Volumenelemente ebenfalls kompakten Träger, da die Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ die Komponenten der äußeren Algebra invariant lassen.

Es existiert also

$$\operatorname{str}_K(e^{-t\mathsf{D}^2}) \forall t \text{ und } K.$$

Außerdem ist

$$\left|\operatorname{str}_K\left(e^{-t\mathsf{D}^2} - P_0\right)\right| = \left|\int\limits_K \operatorname{str}\left(\left\langle x \left| P_1 e^{-tD^2} P_1 \right| x \right\rangle\right) dx\right| \leq C \operatorname{vol}(K) e^{-\lambda t/2},$$

wobei λ das Infimum des Spektrums des Operators $P_1 \mathsf{D}^2 P_1$, der auf dem Komplement des Kerns wirke, und $\operatorname{vol}(K)$ das Integral der Indikatorfunktion der Menge K bezeichne. Da der Operator als Fredholm-Operator ein abgeschlossenes Bild hat und injektiv ist, gilt $\lambda > 0$. Das Netz

$$\left\{ \operatorname{str}_K(e^{-t\mathsf{D}^2}) | K \subset T^*M \text{ kompakt } \right\}$$

wird stationär, da der Träger des Integranden kompakt ist. Bezeichne K' ein Kompaktum, so dass $\operatorname{str}_K(e^{-t\mathsf{D}^2}) = \operatorname{str}_{K'}(e^{-t\mathsf{D}^2})\ \forall\ K \supset K'$. Dann ist

$$\left|\operatorname{str}_K\left(e^{-t\mathsf{D}^2} - P_0\right)\right| = \left|\operatorname{str}_K(e^{-t\mathsf{D}^2}) - \operatorname{str}_K(P_0)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_K \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x)) dx - \operatorname{str}_K(P_0)\right| \leq C \operatorname{vol}(K) e^{-\lambda t/2}.$$

Für $K \supset K'$ ist das Integral $\int_K \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x)) = \int_{T^*M} \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x))$ von t unabhängig, so dass

$$\operatorname{str}(P_0) = \lim_K \operatorname{str}_K(P_0) = \lim_K \int_K \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x)) = \int_{T^*M} \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x)).$$

Da $\operatorname{str}(P_0) = \operatorname{index}(\mathsf{D}^+)$ folgt die Gleichheit

$$\operatorname{index}(\mathsf{D}^+) = \int\limits_{T^*M} \operatorname{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x)) dx.$$

Nun stimmen die Funktionen $x \mapsto \mathrm{str}(k_t^{\mathsf{D}}(x,x))$ und $x \mapsto \mathrm{str}(k_t(x,x))$ überein, da sie außerhalb einer Umgebung des Trägers der Vertwistungsbündel U_0 konstant 0 sind und wegen der Tatsache, dass die Operatorkerne $k_t^{\mathsf{D}}(x,y)$ und $k_t(x,y)$ innerhalb von U_0 auf der Diagonale übereinstimmen, da die die Halbgruppen generierenden Operatoren dort übereinstimmen, so dass folgt

$$\mathrm{index}(\mathsf{D}^+) = \int\limits_{T^*M} \mathrm{str}(k_t(x,x))dx.$$

Da index(D^+) =index($\mathcal{D}^+$) = gilt also für den Operator $\mathcal{D}^+$

$$\mathrm{index}(\mathcal{D}^+) = \int\limits_{T^*M} \mathrm{str}(k_t(x,x))dx.$$

□

5.1.6 Satz *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für den Index des Operators $\mathcal{D}_+$ aus dem Satz 5.1.6 über der Mannigfaltigkeit T^*M gilt*

$$\mathit{index}(\mathcal{D}_+) = (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))\mathit{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S})$$

Beweis: Diese Behauptung folgt aus den Sätzen 5.1.6 und 5.1.3. □

5.2 Die Indexformel

In diesem Abschnitt wird die Umformung der charakteristischen Klassen aus dem Indexintegral beschrieben. Dies wid die Indexformel in der bekannten Form für allgemeine PDO liefern. Sei dafür im Weiteren $n :=\dim M$.

Sei $\mathcal{D}$ der Operator aus der Formel $(*)$ auf $\mathcal{E} := \mathcal{S}(T^*M)\hat{\otimes}(E \oplus F)$, der das Kasparov-Produkt der Symbolklasse mit dem Dolbeault-Operator von T^*M definiert. Es wird gezeigt, dass man die Indexformel

$$\mathrm{index}(\mathcal{D}_+) = (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S})$$

in diesem Fall umformen kann zu der Formel

$$\operatorname{index}(\mathcal{D}_+) = (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \operatorname{Td}(TM \otimes \mathbb{C})\operatorname{ch}(\sigma(P)).$$

Dazu ist zunächst die relative Krümmung des Moduls $\mathcal{E}$ zu berechnen. Da der Modul $\mathcal{E}$ durch die Vertwistung des Moduls $\mathcal{S}(T^*M)$ mit $E \oplus F$ gegeben ist, erhält man seine relative Krümmung als Summe der Krümmung $\Omega^{E\oplus F}$ und der relativen Krümmung von $\mathcal{S}(T^*M)$. In Satz 3.4.2 wurde gezeigt, dass die relative Krümmung des Clifford-Moduls $\mathcal{S}(T^*M)$ 0 ist;

$$\Omega^{\mathcal{S}(T^*M)/\mathcal{S}} = 0.$$

Daher ist die relative Krümmung von $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\Omega^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} = \Omega^{E\oplus F}.$$

Das Tangentialbündel des Kotangentialbündels einer Mannigfaltigkeit ist nach Satz 3.1.8 isomorph zur Komplexifizierung eines reellen Vektorbündels. Auf einem Bündel dieser Art lässt sich die Klasse folgendermaßen umformen.

Ist E ein reelles Bündel und $E \otimes \mathbb{C}$ seine Komplexifizierung. Sei

$$\operatorname{Td}_{\mathbb{C}}(E) := \operatorname{Td}(E \otimes \mathbb{C}).$$

Atiyah und Singer nennen diese Klasse die Indexklasse des Bündels E. Man erhält

$$\operatorname{Td}_{\mathbb{C}}(E) = \det_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^{E\otimes\mathbb{C}}}{e^{\Omega^{E\otimes\mathbb{C}}} - 1}\right) = \det_{\mathbb{R}}\left(\frac{\Omega^{E}}{e^{\Omega^{E}} - 1}\right),$$

wobei man mit der alternativen Schreibweise

$$\det(A) = \exp(-\operatorname{tr}(\ln(A)))$$

erhält, dass

$$\operatorname{Td}_{\mathbb{C}}(E) = \det_{\mathbb{R}}\left(\frac{\Omega^{E}}{e^{\Omega^{E}/2} - e^{-\Omega^{E}/2}}\right)\exp(-\operatorname{tr}(\Omega^{E}/2)).$$

Die Krümmung Ω^E ist eine 2-Form mit Werten in den reellen schiefsymmetrischen Endomorphismen. Daher ist Spur der Matrix Ω^E gleich 0 und man erhält

$$\operatorname{Td}_{\mathbb{C}}(E) = \det_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi^*(\Omega^{E})}{e^{\pi^*(\Omega^{E})/2} - e^{-\pi^*(\Omega^{E})/2}}\right).$$

Betrachtet man nun die Todd-Klasse des Tangentialbündels der Mannigfaltigkeit T^*M, so ergibt sich wegen der Isomorphie

$$T(TM) \simeq \pi^*(TM \otimes \mathbb{C}),$$

$$\mathrm{Td}(T(T^*M)) = \pi^*\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TM) = \det_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi^*(\Omega_M)}{e^{\pi^*(\Omega_M)/2} - e^{-\pi^*(\Omega_M)/2}}\right).$$

Für die $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse der Mannigfaltigkeit T^*M erhält man

$$\hat{\mathcal{A}}(T(T^*M)) =$$

$$= \det{}^{1/2}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\Omega_{T^*M}}{e^{\Omega_{T^*M}/2} - e^{-\Omega_{T^*M}/2}}\right) = \det{}^{1/2}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi^*(\Omega_M)\otimes\mathbb{C}}{e^{\pi^*(\Omega_M\otimes\mathbb{C})/2} - e^{-\pi^*(\Omega_M\otimes\mathbb{C})/2}}\right) =$$

$$\det_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi^*(\Omega_M)}{e^{\pi^*(\Omega_M)/2} - e^{-\pi^*(\Omega_M)/2}}\right).$$

Man erhält also für diese charakteristischen Klassen die Identität

$$\mathrm{Td}(T(T^*M)) = \hat{\mathcal{A}}(T(T^*M)).$$

Insgesamt folgt

$$\hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S}) = \hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))\mathrm{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}\exp(-\Omega^{E\oplus F}) =$$

$$= \mathrm{Td}(T(T^*M))\mathrm{ch}(\sigma(P)).$$

Für den Operator $\mathcal{D}_+$ aus $(**)$ ergibt sich insgesamt die folgende Formel für den Index.

$$\mathrm{index}(\mathcal{D}_+) = (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \hat{\mathcal{A}}(T(T^*M))\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S}) =$$

$$= (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}(T(T^*M))\mathrm{ch}(\sigma(P)) = (2\pi i)^n \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TM)\mathrm{ch}(\sigma(P)).$$

Dies liefert nun den Indexsatz in seiner allgemeinen Form. Nach Satz 4.7.7 ist

$$\mathrm{index}(P) =< \mathbf{1}_M, [P] >= (-1)^n < \sigma(P), \overline{\partial}_{T^*M} >= (-1)^n\mathrm{index}(\mathcal{D}_+).$$

Mit der Identität

$$\mathrm{index}(\mathcal{D}_+) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T^*M} \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TM)\mathrm{ch}(\sigma(P))$$

erhält man den Indexsatz von Atiyah und Singer;

$$\operatorname{index}(P) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T^*M} \operatorname{Td}_{\mathbb{C}}(TM)\operatorname{ch}(\sigma(P)).$$

Anhang P

Pseudodifferentialoperatoren

In diesem Anhang sollen grundlegende Definitionen und Sätze eine Zusammenfassung wesentlicher Eigenschaften von Pseudodifferentialoperatoren (PDO) geben, die im Text gebraucht werden. Alle Sätze und Definitionen stammen aus [H] bzw. sind schwächere Versionen der dort angegebenen. Die Nummern nach den Sätzen beziehen sich auf die Nummerierung dort.

P.0.1 Definition *Wenn $m \in \mathbb{R}$ so sei $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ die Menge aller $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, so dass für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ein $C_{\alpha,\beta}$ existiert mit*

$$\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \| \leq C_{\alpha,\beta}(1+ \| \xi \|)^{m-\alpha}, x, \xi \in \mathbb{R}.$$

S^m heißt der Raum der Symbole der Ordnung m. Weiter sei $S^{-\infty} := \bigcap S^m$, $S^\infty := \bigcup S^m$.

[18.1.1]

Viele Sätze über PDO erlauben eine explizite Identifikation des Symbols nur auf 'Asymptotik' genau. Dazu wird der folgende Satz benötigt.

P.0.2 Satz *Sei $a_j \in S^{m_j}$, $j = 0, 1, 2...$ und es gelte $m_j \to -\infty$ für $j \to \infty$. Sei $m'_k = \max j \geq k m_j$. Dann existiert ein $a \in S^{m'_o}$, so dass $supp(a) \subset \bigcup supp(a_j)$ und für jedes k gilt*

$$(*)\ a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m'_k}.$$

Das Symbol a ist eindeutig modulo $S^{-\infty}$ und (*) gilt bzgl. jeder Reihenfolge der Summierung, so dass man schreiben kann

$$a \sim \sum a_j.$$

[18.1.3]

Die Abbildung $a(\cdot,\cdot) \mapsto \inf C_{\alpha,\beta}$, so dass $C_{\alpha,\beta}$ die obige Ungleichung erfüllt, ist eine Halbnorm auf S^m für jedes α, β. Variiert man α, β über alle Multiindices in $\mathbb{N}^n$, so erhält man eine Familie von Halbnormen, die auf S^m eine lokalkonvexe Topologie definieren. Auf dem Schwartzraum $\boldsymbol{S}$ hat man ebenfalls eine solche Topologie und es gilt der folgende Satz.

P.0.3 Satz *Ist $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und $u \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, so definiert*

$$(op(a)u)(x) := \int e^{i<x,\xi>} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)$$

eine Funktion $op(a)u \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$, und die bilineare Abbildung $(a,u) \mapsto op(a)u$ ist stetig. Die Abbildung $u \mapsto op(a)u$ heißt PDO der Ordnung m mit Symbol a. Die Menge aller PDO der Ordnung m wird mit $\Psi^m(\mathbb{R}^n) = \Psi^m$ bezeichnet. [18.1.6]

Dieser Satz ergibt also für jedes Symbol einen stetigen Endomorphismus von $\boldsymbol{S}$. Die Zuordnung $(u,v) \mapsto \int u\overline{v}$ ergibt eine sesquilineare Paarung auf $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, denn es ist $\boldsymbol{S} \subset L^2$. Ist $a \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, so ist $op(a)$ ein Integraloperator der durch einen glatten Operatorkern definiert ist. Es gilt

$$(\mathrm{op}(a)u)(x) = \int K(x,y)u(y)dy,$$

wobei

$$K(x,y) = \int e^{i(x-y,\xi)} a(x,\xi)d\xi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Der bzgl. $<,>_{L^2}$ adjungierte Operator zu dem Operator mit Kern $K(x,y)$ hat bekanntermaßen den Kern $\overline{K(y,x)}$, und der Operator mit diesem Kern ist in $\Psi^{-\infty}$ und gegeben durch das Symbol

$$b(x,\xi) = \int e^{-i<y,\eta>} a(x-y,\xi-\eta)dyd\eta$$

Nun kann man b vermöge seines Kernes als Element in $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ auffassen und ebenso a und die Abbildung $a \overset{Ad}{\mapsto} b$, die durch obige Formel gegeben ist, ist stetig bezüglich der Topologie von $\boldsymbol{S}'$. Es ist $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}'$ dicht, so dass sich Ad ausdehnen läßt auf $\boldsymbol{S}'$ und es gilt

$$< \mathrm{op}(a)u, v >_{L^2} = < u, Ad(\mathrm{op}(a))v >_{L^2} \quad \forall u,v \in \boldsymbol{S}$$

für alle op$(a) \in \boldsymbol{S'}$. Der folgende Satz besagt, dass für $a \in S^m$ $Ad(\mathrm{op}(a)) \in \Psi^m$, und man hat eine Asymptotik für das Symbol dieses Operators. Es soll $\sigma(P)$ für $P \in \Psi^m$ das Symbol von P in S^m bedeuten. D_x bezeichne von jetzt an den Operator $-i\partial/\partial x$.

P.0.4 Satz *Wenn $a \in S^m$, so ist $b := \sigma(Ad(op(a))) \in S^m$ und*

$$b(x,\xi) \sim \sum \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a(x,\xi)}/\alpha!$$

[18.1.7]

Weiter hat man

P.0.5 Satz *Seien $a_j \in S^{m_j}$ $j = 1, 2$. Dann gilt für die Operatoren in $\boldsymbol{S}$ bzw. $\boldsymbol{S'}$*

$$op(a_1)op(a_2) = op(b),$$

wobei $b \in S^{m_1+m_2}$, und man hat die Asymptotik

$$b(x,\xi) \sim \sum_\alpha \partial_\xi^\alpha a_1(x,\xi) D_x^\alpha a_2(x,\xi)/\alpha!.$$

[18.1.8]

Operatoren, die eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen, heißen elliptisch.

P.0.6 Satz *Sei $a \in S^m$ und $b \in S^{-m}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *$op(a)op(b) - id \in \Psi^{-infty}$*

2. *$op(b)op(a) - id \in \Psi^{-infty}$*

3. *$a(x,\xi)b(x,\xi - 1 \in S^{-1}$*

4. *$\exists c, C:\ a(x,\xi) > c \parallel \xi \parallel$ wenn $\parallel \xi \parallel > C$*

[18.1.9]

Für die folgenden Sätze ist eine weiter gefasste Definition des Begriffs des Kernes erforderlich. Weiter oben war ein Operator der Form

$$\mathcal{K}u(x) = \int K(x,y)u(y)dy$$

aufgetreten, wobei $K \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^{2n})$ war. In Analogie hierzu gilt der Schwartzsche Kern-Satz:

P.0.7 Satz *Jedes K in $\mathcal{D}'(X_1 \times X_2), X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ offen, definiert durch die Formel*

$$< \mathcal{K}\phi, \psi >:= K(\phi \otimes \psi) \ \psi \in \mathcal{D}(X_1), \phi \in \mathcal{D}(X_2)$$

eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{K}$ von $\mathcal{D}(X_2)$ nach $\mathcal{D}(X_1)$. Außerdem ist jede solche Abbildung durch ein eindeutig bestimmtes Element aus $\mathcal{D}(X_1 \times X_2)$ definiert. $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ heißt der Kern des Operators $\mathcal{K}$.
[5.2.1]

Dieser Satz gilt immer noch, wenn man $\mathcal{D}$ durch $\boldsymbol{S}$ und $\mathcal{D}'$ durch $\boldsymbol{S}'$ ersetzt.

P.0.8 Satz *Seien X und X_κ vermöge $\kappa : X \to X_\kappa$ diffeomorphe offene Mengen des $\mathbb{R}^n$. Wenn $a \in S^m$ und der Kern von op(a) kompakten Träger (im Distributionensinne) in $X \times X$ hat, so existiert $a_\kappa \in S^m$, so dass der Kern von $op(a_\kappa)$ kompakten Träger in $X_\kappa \times X_\kappa$ hat und*

$$(op(a_\kappa)u) \circ \kappa = op(a)(u \circ \kappa).$$

Es gilt

$$a_\kappa(\kappa(x), \eta) \sim \sum \partial_\xi^{(\alpha)} a(x, {}^t\kappa'(x)\eta) D_y^\alpha e^{i<\rho_x(y),\eta>}/\alpha! \ |_{x=y}$$

wobei $\rho_x(y) = \kappa(y) - \kappa(x) - \kappa'(x)(x-y)$. Die Terme in der Reihe sind Elemente in $S^{m-\alpha/2}$ und $a_\kappa(\kappa(x), \eta) - a(x, {}^t\kappa(x)\eta) \in S^{m-1}$.
[18.1.17]

Man kann weiter PDO auf Mannigfaltigkeiten definieren.

P.0.9 Definition *Ein PDO auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit X ist eine stetige lineare Abbildung $A : C_c^\infty(X) \to C^\infty(X)$, so dass für jedes Kartengebiet X_κ mit $\kappa : X_\kappa \to \tilde{X}_\kappa \subset \mathbb{R}^n$ und alle $\phi, \psi \in C_c^\infty(\tilde{X}_\kappa)$ die Abbildung*

$$u \mapsto \phi(\kappa^{-1})^* A \kappa^*(\psi u) \ u \in \boldsymbol{S}'$$

in Ψ^m ist. Man schreibt dann $A \in \Psi^m$.
[18.1.20]

Weiter gilt der folgende Satz.

P.0.10 Satz *Sei* $A : C_c^\infty(X) \to C^\infty(X), X \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine stetige lineare Abbildung, so dass für alle* $\phi, \psi \in C_c^\infty(X)$ *die Abbildung*

$$u \mapsto \phi A \psi u \; u \in \boldsymbol{S'}$$

in Ψ^m *liegt. Dann existiert* $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$*, so dass*

$$A = op(a) + A_0$$

wobei A_0 *einen glatten Kern hat. In* $S^m/S^{-\infty}$ *ist a eindeutig bestimmt.*
[18.1.19]

Die vorangehenden Sätze erlauben die Definition des Hauptsymbols auch für PDO auf Mannigfaltigkeiten. Zunächst sei $S^m(T^*X)$ definiert als die Menge aller $a \in C^\infty(T^*X)$, so dass für jede Karte $\kappa : X_\kappa \to \tilde{X_\kappa}$

$$a(\kappa^{-1}(x),^t(\kappa^{-1})'\eta) \in S^m.$$

Diese Definition stimmt mit der bisherigen überein, wenn $X \in \mathbb{R}^n$ offen ist. Wenn $A \in \Psi^m(X)$, so definiert die Einschränkung von A auf ein Kartengebiet X_κ einen Operator in $\Psi^m(\tilde{X_\kappa})$ vermöge Zurückholung. Hat man nun ein weiteres Kartengebiet $X_{\kappa'}$ mit $X_{\kappa'} \cap X_\kappa \neq \emptyset$, so ergibt dies einen Diffeomorphismus $\kappa^{-1}(X_{\kappa'} \cap X_\kappa) \to (\kappa')^{-1}(X_{\kappa'} \cap X_\kappa)$. Für Testfunktionen ϕ, ψ hat die Zurückholung $(\phi A \psi)_\kappa$ von $\phi A \psi$ vermöge κ einen Kern mit kompaktem Träger in $X_\kappa \times X_\kappa$ und die Zurückholung nach $X_{\kappa'} \times X_{\kappa'}$ ist der Operator der durch der obigen Diffeomorphismus aus der Zurückholung nach $X_\kappa \times X_\kappa$ hervorgeht. Nach Satz P.0.10 ist A_κ von der Form

$$A_\kappa = \mathrm{op}(\tilde{a_\kappa}) + A_0,$$

wobei A_0 einen C^∞-Kern in $\tilde{X_\kappa} \times \tilde{X_\kappa}$ besitzt. Analoges gilt für $A_{\kappa'}$. Nach Satz P.0.8 ist $\tilde{a_\kappa} - \tilde{a_{\kappa'}} \in S^{m-1}$ und man erhält auf X somit ein Element

$$a \in S^m(T^*X)/S^{m-1}(T^*X)$$

durch die Bedingung

$$\mathrm{op}(a \mid_{X_\kappa}) - A_\kappa \in \Psi^m(\tilde{X_\kappa})/\Psi^{m-1}(\tilde{X_\kappa}).$$

Dies ist ein Isomorphismus:

$$\Psi^m(X)/\Psi^{m-1}(X) \simeq S^m(T^*X)/S^{m-1}(T^*X).$$

P.0.11 Definition *Das Bild eines PDO A unter dem Isomorphismus* $\Psi^m(X)/\Psi^{m-1}(X) \simeq S^m(T^*X)/S^{m-1}(T^*X)$ *heißt das Hauptsymbol von A.*

Die Komposition von Operatoren auf Mannigfaltigkeiten gehorcht in Analogie zu oben dem folgenden Satz.

P.0.12 Satz *Wenn* $A_j \in \Psi^{m_j}$ *so ist* $A_1A_2 =: A \in \Psi^{m_1+m_2}$ *und das Hauptsymbol von A ist gleich dem Produkt der Hauptsymbole von* A_1 *und* A_2.
[18.1.22][18.1.23]

Elliptizität von PDO auf Mannigfaltigkeiten wird durch folgenden Satz definiert.

P.0.13 Satz $A \in \Psi^m(X)$ *heißt elliptisch, wenn das Hauptsymbol* $a \in S^m/S^{m-1}$ *ein Inverses* $b \in S^{-m}/S^{-m-1}$ *besitzt, so dass also* $ab - 1 = 0$ *in* S^0/S^{-1}. *Es existiert dann eine Parametrix* $B \in \Psi^{-m}$ *mit*

$$AB - id \in \Psi^{-\infty} \; , \; BA - id \in \Psi^{-\infty}.$$

[18.1.24]

In der Diskussion von PDO im $\mathbb{R}^n$ nimmt man das Lebesgue-Maß als gegeben hin, und definiert die Operatoren wie oben geschehen mit Hilfe entsprechender Integralformeln. Auf einer Mannigfaltigkeit hat man zunächst kein kanonisches Maß, und man kann PDO mit Hilfe von $\frac{1}{2}-$Dichten auf X definieren, ohne ein solches Maß auszuzeichnen. Dies liefert eine kanonische bilineare Paarung auf $C_c(X)$, die die Definition von adjungierten Operatoren ermöglicht. Das Bündel der $\frac{1}{2}-$Dichten ist ein triviales komplexes Linienbündel über X.

P.0.14 Definition *Seien* E, F $\mathbb{C}-$*Vektorbündel über* X. *ein PDO der Ordnung* m *von* $C_c^\infty(X;E)$ *nach* $C^\infty(X;F)$ *ist eine stetige lineare Abbildung*

$$A : C_c^\infty(X;E) \to C^\infty(X;F),$$

so dass für $Y \subset X$ *offen, mit* E, F *trivial über* Y *vermöge*

$$\Phi_E : E\mid_Y \to Y \times \mathbb{C}^n \; , \; \Phi_F : F\mid_Y \to Y \times \mathbb{C}^m,$$

A gegeben ist durch eine Matrix von PDO $A_{ij} \in \Psi(Y)$, *und*

$$\Phi_F(Au\mid_Y)_i = \sum A_{ij}(\Phi_E u)_j \; , \; u \in C_c(Y;E).$$

Man schreibt dann $A \in \Psi^m(X;E,F)$.
[18.1.32]

Das Hauptsymbol eines PDO ist dann definiert als Element in

$$S^m(T^*X; \mathrm{Hom}(E,F))/S^{m-1}(T^*X; \mathrm{Hom}(E,F)).$$

Zur Definition des adjungierten Operators wurde oben das Lebesguemaß genutzt, das eine Einbettung $\boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{S'}$ vermöge

$$< u, v >_{\boldsymbol{S'}} := \int uvdx$$

lieferte. Das Produkt zweier $\frac{1}{2}-$Dichten liefert eine $1-$Dichte für die das Integral über die Mannigfaltigkeit wohldefiniert ist, so dass man eine Paarung $C_c^\infty(X;\Omega^{\frac{1}{2}}) \times C_c^\infty(X;\Omega^{\frac{1}{2}}) \to \mathbb{C}$ hat definiert durch

$$(u, v) := \int uv.$$

Somit hat man eine Inklusion $C_c^\infty(X;\Omega^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(X;\Omega^{\frac{1}{2}})$ und man kann von einem zu $A \in \Psi^m(X;\Omega^{\frac{1}{2}},\Omega^{\frac{1}{2}})$ adjungierten Operator $A^* \in \Psi^m(X;\Omega^{\frac{1}{2}},\Omega^{\frac{1}{2}})$ sprechen (der Einschränkung des eigentlichen adjungierten Operators $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}'$).

P.0.15 Satz *Zu $A \in \Psi^m(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}, F \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$ existiert ein adjungierter Operator $A^* \in \Psi^m(X; F^* \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}, E^* \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$, so dass*

$$(Au, v) = (u, A^*v) \text{ für alle } u \in C_c^\infty(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}), v \in C_c^\infty(X; F^* \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}).$$

Wenn a ein Hauptsymbol (ein Element der Äquivalenzklasse des Hauptsymbols) für A ist, so ist a^* ein Hauptsymbol für A^*.
[18.1.34]

Elliptische PDO auf Mannigfaltigkeiten sind Fredholm-Operatoren, wenn der Raum $C_c^\infty(X; E)$ der Schnitte eines Vektorbündels E mit den entsprechenden Normen ausgestattet wird. H^s bezeichne in den folgenden Sätzen die Sobolev-Räume von Schnitten in E.

P.0.16 Satz *Sei X kompakt. Wenn $P \in \Psi^m(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}, F \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$ elliptisch ist, so definiert P einen Fredholm-Operator von $H^s(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$ nach $H^{s-m}(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$ für beliebige $s \in \mathbb{R}$ mit $ker(P) \subset C^\infty(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$. Das Bild ist das orthogonale Komplement von $ker(P) \subset C^\infty(X; F^* \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$.*
[19.2.1]

Als direkte Folgerung dieses Satzes ergibt sich die Unabhängigkeit des Indexes von s. Mit dem rellichschen Einbettungssatzes folgt weiter, dass der Index nur von der Klasse von P in Ψ^m/Ψ^{m-1} abhängt, denn zwei Elemente der selben Klasse unterscheiden sich nur um einen kompakten Operator. Die beiden letzten Sätze beziehen sich auf die Homotopieinvarianz des Index.

P.0.17 Satz *Sei X kompakt. Seien des Weiteren $t \mapsto a(t)$ und $t \mapsto b(t)$ stetige Abbildungen von $[0,1]$ nach S^m, so dass $a(t), b(t)$ uniform beschränkt sind in S^m sowie $a(t)b(t) - 1$ und $b(t)a(t) - 1$ uniform beschränkt sind in S^{-1}. Wenn A_0, A_1 Hauptsymbole $a(0)$ bzw. $a(1)$ haben, so ist index(A_1)=index(A_0).*
[19.2.2]

P.0.18 Satz *Sei X kompakt und $P \in \Psi^m(X; E \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}, F \otimes \Omega^{\frac{1}{2}})$ ein elliptischer PDO und p ein Repräsentant des Hauptsymbols. Sei h homogen vom Grad 1 auf T^*X, positiv und C^∞ außerhalb X. Dann sind für alle genügend großen C die Operatoren mit Symbol $p(x, C\xi/h(\xi))$ elliptisch und haben den gleichen Index wie P.*
[19.2.2]

Anhang S

Symbole

$C_c(\Omega)$	stetige Funktionen mit kompaktem Träger
$C(X)$	stetige Funktionen auf dem kompakten Raum X
$C_0(\Omega)$	$\overline{C_c(\Omega)}^{\Vert\cdot\Vert_{sup}}$
$\mathbb{M}_n$	quadratische Matrizen der Dimension n mit komplexen Einträgen
$\mathcal{C}_V^c$	Komplexifizierung der Cliffordalgebra des euklidischen Raumes V
$\mathcal{C}_V$	Cliffordalgebra des euklidischen Vektorraumes V
$\mathcal{C}^c(M)$	Bündel der Clifford-Algebren $\mathcal{C}^c_{T_xM}$ über M
$\Lambda^* V$	äußere Algebra des Vektorraumes V
$\hat{\mathcal{A}}(E)$	$\hat{\mathcal{A}}$-Klasse des Vektorbündels E
$\mathrm{Td}(E)$	Todd-Klasse des komplexen Vektorbündels E
$\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(E)$	$\mathrm{Td}(E \otimes \mathbb{C})$
$\Lambda^*(M)$	Bündel der äußeren Algebren $\Lambda^*_{T_xM}$ über M
$C(M, E)$	Stetige Schnitte des Vektorbündels E über M
$\mathcal{S}(M)$	für eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit M das Bündel $\Lambda^* T^{0,1}(M)$
$M_n(A)$	Matrizen der Dimension n mit Einträgen aus A
$\mathcal{H}_B$	$H \otimes B$ als C^*-Modul für einen separablen Hilbertraum H
A^G	Subalgebra der G-invarianten Elemente der G-Algebra A
$\hat{\otimes}$	graduiertes Tensorprodukt von Algebren oder Moduln
M_f	Multiplikationsoperator mit der Funktion f
$\mathrm{supp}(f)$	Träger der Funktion f
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Algebra der adjungierbaren B-linearen Endomorphismen des B-C^*-Moduls $\mathcal{H}$
$\mathcal{K}(\mathcal{H})$	Algebra der kompakten Endomorphismen des B-C^*-Moduls $\mathcal{H}$
A^+	Unitalisierung der Algebra A
$[x, y]^{\hat{}}$	Graduierter Kommutator der Elemente x und y einer Algebra
X^+	Einpunktkompaktifizierung des lokal kompakten Raumes X

$+$	Bei einer Einpunktkompaktifizierung der hinzugefügte Punkt
$\mathcal{D}(\Omega)$	Raum der Testfunktionen auf der offenen Menge Ω mit der Topologie des induktiven Limes
$\Gamma(E)$	glatte Schnitte eines Vektorbündels E über einer Mannigfaltigkeit M.
$\mathcal{M}(A)$	Multiplikatoralgebra der C^*-Algebra A
$\mathcal{Q}(A)$	stabilisierte Calkinalgebra der C^*-Algebra A: $\mathcal{M}(A\otimes\mathcal{K})/A\otimes\mathcal{K}$
Ω_M	Riemannsche Krümmungsform der riemannschen Mannigfaltigkeit M
$\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartz-Raum

Anhang L

Literatur

[A] Atiyah, M.: K-Theory; Benjamin (1967)

[A-S1] Atiyah, M.; Singer, I.M.: The index of elliptic operators:I; Ann. of Math. 87 (1968)

[A-S2] Atiyah, M.; Singer, I.M.: The index of elliptic operators:III Ann. of Math. 87 (1968)

[B-G-V] Berline,N.; Getzler, E.; Vergne, M.: Heat Kernels and Dirac Operators, Springer (1991)

[B] Blackadar, B.: K-Theory for Operator Algebras, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 1998

[B-J] Baaj, S.; Julg, P.:Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens, C.R. Acad. Sci. Paris 296 Seiten 875-878 (1985)

[C-S] Connes, A.; Skandalis, G.: The Longitudinal Index Theorem for Foliations, Publ. RIMS, Kyoto 20 (1984)

[D] Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars (1957)

[D-K] Davis, J. F.; Kirk, P.: Lecture Notes in Algebraic Topology, AMS Graduate studies in mathematics (2001)

[F] Friedrich, Th.: Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie, Vieweg (1997)

[G] Getzler, E.: A Short Proof of the Atiyah-Singer Index Theorem, Topology 25 (1986)

[Gi] Gilkey, P.: Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah-Singer Index Theorem, Publish or Perish (1984)

[G-V-F] Gracia-Bondia, J.M.; Varilly, J.C.; Figueroa, H.: Elements of Noncommutative Geometry, Birkheuser (2000)

[G-H-V] Greub, W.; Halperin, S.; Vanstone, R.: Connections, Curvature, and Cohomology, Volume II, Academic Press (1973)

[H] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer (1985)

[H-R] Higson, N.; Roe, J.: Analytic K-Homology, Oxford University Press (2000)

[K1] Kasparov, G.: The Operator K-Functor and Extensions of C^*-Algebras; Math. USSR Izv. 16 (1981)

[K2] Kasparov, G.: Equivariant KK-Theory and the Novikov Conjecture; invent.math. 91 (1988)

[K3] Kasparov, G.: Topological Invariants of Elliptic Operators I: K-Homology; Math. USSR Izv. 9. (1975)

[L-M] Lawson H.B.; Michelsohn M.-L.:Spin Geometry, Princeton University Press (1989)

[P] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations; Springer(1983)

[Pa] Palais, R.: Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem; Princeton University Press (1965)

[Q] Quillen, D.: Superconnections and the Chern Character, Topology 24 (1985)

[W] Wells, R.O.: Differential Analysis on Complex Manifolds, Springer (1980)

[We] Werner, D.: Funktionalanalysis; Springer Lehrbuch (1995)

[W-O] Wegge-Olsen, N.E.:K-Theory and C^*-Algebras; Oxford University Press (1993)

Lebenslauf

Persönliche Daten:
Name: Karsten Hippler
Geburtsdatum: 31.05.1977
Geburtsort: Berlin
Nationalität: Deutsch

Schulabschluss:
1996 am Gottfried-Keller-Gymnasium in Berlin.

Akademische Ausbildung:
1998-2003: Studium der Mathematik an der Humboldt Universität zu Berlin. Dilpomarbeit bei Prof. Dr. J. Brüning und Prof. Dr. E. Kirchberg.

Promotion:
Promotion im Internationalen Graduierten Kolleg Arithmetic and Geometry an der Humboldt Universität zu Berlin bei Prof. Dr. J. Brüning.