Vortragsplan für das Blockseminar

Schleifengruppen und ihre Anwendungen in Geometrie und Physik

vom 18. – 23. Juni 2005 auf der Nordseeinsel Borkum
organisiert von Christian Becker, Konrad Waldorf, Anna Wienhard
http://www.math.uni-potsdam.de/∼becker/Seminare/borkum.html

Strukturtheorie

1. Vortrag: Einführung (*Alexandra Kruppa*)
In dem Vortrag soll die klassische Theorie halbeinfacher Liegruppen und -algebren kurz resümiert werden (Exponentialabbildung, adjungierte Darstellung, Wurzelsysteme, Weylgruppe, Rekonstruktion aus Cartan-Matrix, Dynkin Diagramm). Beispiel: $SU(2)$
Lit.: z.B. [4], [15], chap. 2

2. Vortrag: Zentrale Erweiterungen (*Thilo Kuessner*)
Klassifikation zentraler Erweiterungen der Schleifenalgebra durch invariante symmetrische Bilinearformen. Zentrale Erweiterung der Schleifengruppe LG für G einfach zusammenhängend. Kreisbündel und zentrale Erweiterungen. Zentrale Erweiterungen für G halbeinfach, aber nicht einfach zusammenhängend. Zentrale Erweiterungen für $LU(n)$.
Lit.: [15], chap. 4

3. Vortrag: Wurzelsysteme, Kac-Moody-Algebren (*Bernhard Hanke*)
Wurzelzerlegung der Schleifenalgebra, die affine Weylgruppe, verallgemeinerte Cartan-Matrizen, Beispiel, drei-dimensionale einfache Unteralgebren erzeugen Erweiterung der polynomialen Schleifengruppe.
Lit.: [15], chap. 5, [12]

4. Vortrag: Schleifen als Operatoren (*Michael Stiller*)
Schleifen aus $LGL_n(\mathbb{C})$ operieren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(S^1;\mathbb{C})$ durch punktweise Multiplikation. Man erhält präziser eine Einbettung von $LGL_n(\mathbb{C})$ in die Gruppe $GL_{res}(\mathcal{H})$ derjenigen Operatoren, die die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ in positive und negative Fouriermoden bis auf Hilbert-Schmidt-Operatoren respektieren. Die Homotopieäquivalenz $GL_{res}(\mathcal{H}) \sim Fred(\mathcal{H}_+)$ spielt eine wichtige Rolle bei der Konstruktion zentraler Erweiterungen von $GL_{res}(\mathcal{H})$ und $LGL_n(\mathbb{C})$.
Lit.: [15], chap. 6

5. Vortrag: Determinantenbündel (*Andreas Gerstenberger*)
Die unendlichdimensionale Graßmannsche $Gr(\mathcal{H})$ ist ein homogener Raum unter der Operation von $GL_{res}(\mathcal{H})$. Das sog. Determinantenbündel $Det \to Gr(\mathcal{H})$ ist ein holomorphes Geradenbündel. Die Operation von $Gr(\mathcal{H})$ liftet sich zu einer Operation der zentralen Erweitung $\widetilde{GL}_{res}(\mathcal{H})$ aus dem vorigen Vortrag. Der Raum der holomorphen Schnitte von $Det \to Gr(\mathcal{H})$ liefert später die sog. Fundamentaldarstellung der Schleifengruppen (s.u. , 10. Vortrag)
Lit.: [15], chap. 7, [18]

6. Vortrag: Homogene Räume, Zerlegungssätze (*Martin Fuchssteiner*)
Die Birkhoff-Zerlegung faktorisiert glatte Schleifen in $GL_n(\mathbb{C})$ in Randwerte holomorpher Abbildungen $\gamma^\pm : \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1\} \to GL_n(\mathbb{C})$ und Homomorphismen $\varphi : S^1 \to (\mathbb{C}^*)^n$. Die Bruhat-Zerlegung faktorisiert polynomiale Schleifen in $GL_n(\mathbb{C})$ so, daß nur Randwerte holomorpher Abbildungen $\gamma^+ : \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} \to GL_n(\mathbb{C})$ auftreten. Man erhält diese Zerlegungen aus Stratifizierungen und Zellenzerlegungen des unendlichdimensionalen homogenen Raums $X = LG/G$. Die Konstruktion dient u.a. der Konstruktion irreduzibler Darstellungen von LG auf den Räumen holomorpher Schnitte geeigneter Geradenbündeln über X (s.u., 11. Vortrag).
Lit.: [15], chap. 8.1, 8.3 – 8.7

7. Vortrag: Anwendungen auf Harmonische Abbildungen (*Christoph Bohle*)
K. Uhlenbeck hat gezeigt, daß jede harmonische Abbildung $f : S^2 \to U(n)$ durch die Schleifengruppe $LU(n)$ faktorisiert. Präziser gibt es eine 1:1 Korrespondenz zwischen solchen harmonischen Abbildungen und bestimmten holomorphen Abbildungen $\varphi : S^2 \to LU(n)$. M.A. Guest und Y. Ohnita haben das Resultat auf harmonische Abbildungen in symmetrische Räume verallgemeinert. Ähnliche Anwendungen treten in der Theorie Integrabler Systeme auf. Diese Resultate sind schöne Anwendungen der Zerlegungssätze und des Graßmannschen Modells der Schleifengruppen.
Lit.:[16], [9], [10]; vergl. auch [11], [8]

8. Vortrag: Zur Geometrie von Schleifenräumen (*Falk Henrich*)

Darstellungstheorie

9. Vortrag: Darstellungstheorie I (*Andreas Ott*)
Klassische Theorie
Lit.: z.B. [4]

10. Vortrag: Darstellungstheorie II (*Jan Swoboda*)
In diesem Vortrag werden wesentliche Ergebnisse zur Klassifizierung irreduzibler Darstellungen (mit positiver Energie) von Schleifengruppen vorgestellt. Energie- und Gewichtsfiltrierung sollten an den Beispielen SU(n) und U(n) illustriert werden. Die Basis-Darstellung einer Schleifengruppe spielt eine ähnliche Rolle wie die definierende Darstellung einer kompakten Liegruppe. Jede Darstellung mit positiver Energie trägt eine Wirkung der Liealgebra der Diffeomorphismengruppe des Kreises. Für Schleifentori wird eine Wirkung der Diffeomorphismengruppe konstruiert, die auch für allgemeine Schleifengruppen existiert.
Lit.: [15], chap. 9

11. Vortrag: Geometrie von Schleifengruppen, Borel-Weil-Theorie, (*Tobias Hartnick*)
In der klassischen Borel-Weil-Theorie konstruiert man Darstellungen einer kompakten Liegruppe G auf den Räumen der holomorphen Schnitte geeigneter Geradenbündel über dem homogenen Raum G/T. Eine analoge Konstruktion gibt es auch für Schleifengruppen. Im Zusammenhang mit dieser Konstruktion kann evtl. noch die Geometrie der Schleifengruppen etwas näher betrachtet werden.
Lit.: [15], chap. 8.9 – 8.11, chap. 11, [18]; evtl. auch [2], [3]

12. Vortrag: Die Fundamentaldarstellung (*Florian Hanisch*)
Der Raum der holomorphen Schnitte Γ des dualen Bündels Det^* des Determinantenbündels $Det \to Gr(\mathcal{H})$ ist die fundamentale Darstellung von $\widetilde{GL}_{res}(\mathcal{H})$. Der Raum Γ kann als äussere Algebra und als polynomiale Algebra beschrieben werden. Desweiteren enthält Γ einen dichten Hilbertraum H, auf dem die Gruppe $\widetilde{U}_{res}(\mathcal{H})$ durch unitäre Operatoren wirkt. Beschreibung der Basis-Darstellung von LU_n und LSU_n.
Lit.: [15], chap. 10

13. Vortrag: Axiomatik Konformer Feldtheorien (*Christian Becker*)
In Analogie zu dem expliziten Wess-Zumino-Witten-Modell soll in diesem Vortrag vorgestellt werden, was allgemeiner unter einer Konformen Feldtheorie zu verstehen ist. Lesbare Darstellungen, die insbesondere erklären, welche Rolle die Darstellungen von Schleifengruppen in der Konformen Feldtheorie spielen, sind etwa der Bourbaki-Vortrag von K. Gawedzki sowie die Axiomatik von G. Segal.
Lit.: [5]; ergänzend evtl. [19], [13]

14. Vortrag: Das WZW-Modell (*Konrad Waldorf*)
Wess-Zumino-Witten-Modelle sind explizite Modelle einer zweidimensionalen Konformen Feldtheorie mit (zentralen Erweiterungen der) Schleifengruppen als Symmetrie. In dem Vortrag sollen diese Modelle vorgestellt und die Symmetrien diskutiert werden. Physikalische Vorkenntnisse sind für diesen Vortrag nicht erforderlich.

Lit.: [13], p. 29–42 oder [14]; ergänzend evtl. [6], [7]; für Interessenten mit physikalischen Vorkenntnissen:[1]

Lit.:

References

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] D.S. Freed, *Flag manifolds and infinite-dimensional Kähler geometry*, Infinite-dimensional groups with applications (Berkeley, Calif., 1984), 83–124, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 4, Springer, New York, 1985.

[3] D.S. Freed, *The geometry of loop groups*, J. Differential Geom. 28 (1988), no. 2, 223–276.

[4] J. Fuchs, C. Schweigert, *Symmetries, Lie algebras and representations. A graduate course for physicists*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] K. Gawedzki, *Conformal field theory* Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89. Astérisque No. 177-178, (1989), Exp. No. 704, 95–126.

[6] K. Gawedzki, *Wess-Zumino-Witten conformal field theory*, Constructive quantum field theory, II (Erice, 1988), 89–120, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 234, Plenum, New York, 1990.

[7] K. Gawedzki, *Geometry of Wess-Zumino-Witten models of conformal field theory*, Recent advances in field theory (Annecy-le-Vieux, 1990). Nuclear Phys. B Proc. Suppl. 18B (1990), 78–91 (1991).

[8] M.A. Guest, *Harmonic maps, loop groups, and integrable systems*, London Mathematical Society Student Texts, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[9] M.A. Guest and Y. Ohnita, *Loop group actions on harmonic maps and their applications*, Harmonic maps and integrable systems, 273–292, Aspects Math., E23, Vieweg, Braunschweig, 1994.

[10] M.A. Guest and Y. Ohnita, *Actions of loop groups, deformations of harmonic maps, and their applications*, Selected papers on harmonic analysis, groups, and invariants, 33–50, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 183, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[11] N.J. Hitchin, G.B. Segal and R.S. Ward, *Integrable systems. Twistors, loop groups, and Riemann surfaces*, Lectures from the Instructional Conference held at the University of Oxford, Oxford, September 1997. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 4. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[12] V.G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] T. Kohno, *Conformal field theory and topology*, Translated from the 1998 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, 210. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[14] H. Konno, *Geometry of loop groups and Wess-Zumino-Witten models*, Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993), 139–160, Contemp. Math., 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[15] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[16] G. Segal, *Loop groups and harmonic maps*, Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 153–164, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 139, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[17] G. Segal, *Representations of loop groups. I. Factorization theorems*, Topological quantum field theories and geometry of loop spaces (Budapest, 1989), 16–25, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[18] G. Segal, *Representations of loop groups. II. The determinant bundle*, Topological quantum field theories and geometry of loop spaces (Budapest, 1989), 26–35, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[19] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Topology, geometry and quantum field theory, 421–577, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.